Проф. Л. В. КАНТОРОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

ОРГАНИЗАЦИИ И ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

ИЗДАНИЕ ЛЕНИНГРАДСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЛЕНИНГРАД • 1939

Оглавление

От редактора 3
Введение 5
I. Распределение обработки деталей по станкам, дающее максимальную производительность при условии комплектности. (Постановка основных математических задач.) 7
II. Организация производства с обеспечением максимального выполнения плана при условии заданного ассортимента 13
III. Наиболее полное использование механизмов 16
IV. Максимальное уменьшение отходов 19
V. Максимальное использование комплексного сырья 21
VI. Наиболее рациональное распределение топлива 22
VII. Наилучшее выполнение плана строительства при наличных строительных материалах 23
VIII. Наилучшее распределение посевной площади 25
IX. Наилучший план перевозок 26
Заключение 27
Приложение 1. Метод разрешающих множителей 32
Приложение 2. Решение задачи А для сложного случая (задача Фанерного треста) 55
Приложение 3. Теоретическое добавление — доказательство существования разрешающих множителей 65

Издание Ленинградского Государственного Университета

Отв. редактор *А. Р. Марченко.* Техн. редактор *Е. Е. Астратова.* Корректор *А. Ф. Прокопович.*

Сдано в набор 17/VI 1939 г. Подписано к печати 27/VII 1939 г. Ленoблгорлит № 1441. Тираж 1000 экз. Печ. л. $4^3/_8$. Авт. л. 4. Уч.-авт. л. 4,1. Колич. печ. знак. в 1 печ. л. 47.200. Формат бумаги 60 × 92 см. Заказ № 1119.

2-я типография ОГИЗа РСФСР треста „Полиграфкнига“ „Печатный Двор“ им. А. М. Горького. Ленинград. Гатчинская, 26.

ОТ РЕДАКТОРА

Автор работы „Математические методы организации и планирования производства“, проф. Л. В. Канторович, является крупным специалистом в области математики. Эта работа представляет интерес с чисто математической стороны, так как дает выходящий за рамки классического математического анализа оригинальный метод решения задачи на экстремум. С другой стороны, в этой работе дается приложение математических методов к вопросам организации производства, что заслуживает серьезного внимания со стороны работников различных отраслей промышленности.

Предлагаемая вниманию читателя работа обсуждалась на заседании Математического отдела Института математики и механики Ленинградского государственного университета и получила высокую оценку математиков. Кроме того, Дирекцией Университета было созвано специальное совещание работников промышленности, на котором была подвергнута обсуждению другая сторона работы — ее прикладное значение. Работники промышленности единодушно проявили большой интерес к работе и выразили пожелание в ближайшее время видеть ее опубликованной.

Основная часть данной книги представляет содержание доклада, сделанного на упомянутом совещании, и заключает постановку математических задач и указание на те вопросы организации и планирования из области промышленности, строительства, транспорта и сельского хозяйства, которые приводят к этим задачам. Изложение иллюстрировано несколькими конкретными численными примерами. Недостаток времени, а также то обстоятельство, что автор является математиком, а не производственником, не позволили ни умножить число этих примеров, ни сделать эти примеры максимально реальными и актуальными. Полагаем, что несмотря на это такие примеры будут весьма полезны читателю, ибо они показывают обстоятельства, при которых математические методы применимы, а также эффективность их применения.

Три приложения к работе содержат изложение и обоснование процесса решения указанных экстремальных задач по методу автора.

Мы надеемся, что эта книга сыграет весьма полезную роль в развитии нашей социалистической промышленности.

А. Р. Марченко

ВВЕДЕНИЕ[1]

Грандиозные задачи, выдвинутые в плане третьей пятилетки, требуют, чтобы на основе наилучшего использования существующих резервов промышленности — материалов, рабочей силы, оборудования — добиться максимального выпуска продукции.

Существуют два пути повышения эффективности работы цеха, предприятия и целой отрасли промышленности. Один путь — это различные улучшения в технике, т. е. новые приспособления в отдельном станке, изменение технологического процесса, нахождение новых, лучших видов сырья. Другой путь, пока гораздо меньше используемый, — это улучшение в организации производства и планировании. Сюда относятся, например, такие вопросы, как распределение работ между отдельными станками предприятия или механизмами, правильное распределение заказов по предприятиям, правильное распределение различных видов сырья, топлива и пр. Об этом весьма отчетливо сказано в решениях XVIII партсъезда по докладу товарища Молотова. Там говорится, что: „Важнейшим условием выполнения заданий программы роста производства в третьей пятилетке является ... широкое развертывание работ по внедрению новейшей техники и научной организации производства".[2] Тут именно отмечены оба указанных выше момента: наряду с внедрением новейшей техники, подчеркнута роль научной организации производства.

В связи с решением одной задачи, предложенной Институту математики и механики ЛГУ лабораторией Фанерного треста, я обнаружил, что целый ряд проблем, относящихся к научной организации производства самого разнообразного характера (вопросы наилучшего распределения работы станков и механизмов, максимального уменьшения отходов, наилучшего использования сырья и местных материалов, топлива, транспорта и пр.), приводит к одной и той же группе (экстремальных) математических задач. Эти задачи не подходят непосредственно под задачи, рассматриваемые в математическом анализе. Вернее сказать, они формально подходят, и даже формально оказываются очень про-

---

[1] Данная работа представляет значительно дополненную стенограмму доклада, сделанного 13 мая 1939 г. в Ленинградском государственном университете, на котором присутствовали также представители промышленных исследовательских институтов. Кроме того здесь использованы материалы доклада, посвященного специально вопросам, связанным со строительством, который был сделан 26 мая 1939 г. в Ленинградском институте инженеров промышленного строительства.

[2] „Большевик", 1939, № 7, стр. 14.

стыми, но процесс решения, который там получается, совершенно не применим практически, так как для его выполнения требуется решение десятков тысяч или даже миллионов систем уравнений.

Мне удалось указать сравнительно простой общий метод решения этой группы проблем, который применим ко всем задачам, о которых я говорил, и достаточно прост и эффективен, так что решение их делается вполне осуществимым в практических условиях.

Я хочу еще подчеркнуть тот момент, что большая часть задач, о которых я буду говорить, относящихся к организации и планированию производства, связана именно с советской системой хозяйства и в большинстве случаев не возникает в экономике капиталистического общества. Там выбор продукции определяется не планом, а интересами, выгодами отдельных капиталистов. Владелец предприятия выбирает для производства те товары, которые в данный момент имеют более высокую цену, легче могут найти сбыт и потому дадут большую прибыль. Сырье берется не то, бо́льшие запасы которого имеются в стране, а то, которое предприниматель может купить дешевле. Вопрос о наиболее полном использовании оборудования не ставится, — все равно большинство предприятий работает в половинную мощность.

В СССР дело обстоит иначе. Все подчиняются не интересам и выгоде отдельного предприятия, а задаче выполнения государственного плана.

Основной задачей предприятия является выполнение и перевыполнение плана, входящего в общегосударственный план, и притом не только выполнение плана по суммарным показателям, по общей стоимости продукции, общему тоннажу и т. д., но, непременно, выполнение плана по всем видам продукции, т. е. ассортиментность, — выдерживание плана по отдельным видам продукции, комплектность выпуска, выполнение комплектных изделий и пр.

Вот этот момент — необходимость выполнения плана комплектно и по ассортименту — является весьма существенным для нас, так как при постановке задач, связанных с получением максимального выхода продукции, мы должны учитывать ассортиментность и комплектность как весьма важные дополнительные условия. Весьма важным является также использование сырья и материалов, не как-нибудь априорно выбранных, но тех, которые реально имеются, в частности, местных материалов, использование материалов в соответствии с тем, сколько их производится в данном районе; следует заметить, что наши методы позволяют решать задачи, связанные именно с этими реальными условиями и обстановкой.

Теперь перейдем к рассмотрению различных конкретных проблем организации и планирования производства и выясним те математические задачи, к которым они приводят.

I. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОБРАБОТКИ ДЕТАЛЕЙ ПО СТАНКАМ, ДАЮЩЕЕ МАКСИМАЛЬНУЮ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ПРИ УСЛОВИИ КОМПЛЕКТНОСТИ. (ПОСТАНОВКА ОСНОВНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ)

Чтобы пояснить характер задач, которые мы будем имет в виду, я приведу один очень простой пример, не требующи никаких специальных методов для решения, так как оно ясн само собой. Этот пример будет играть иллюстративную роль и поможет выяснить постановку вопроса.

Пример 1. Фрезерная работа при обработке деталей метал лических изделий может осуществляться на разных станках — фрезерных, револьверных — более усовершенствованных, и ре вольверном автомате. Для определенности я рассмотрю тако вопрос. Имеется три фрезерных станка, три револьверных и оди автомат. Изделие — я рассмотрю очень простой случай — состои из двух деталей.

Выработка по каждой детали такая. За рабочий день н фрезерном станке можно изготовить 10 первых деталей либ 20 вторых; на револьверном — 20 первых либо 30 вторых; н автомате — 30 первых либо 80 вторых. При этом, если мы учте все количество станков (фрезерных и револьверных по три, автомат один), то за рабочий день по желанию мы можем изго товить первых деталей на каждой группе станков 30 + 60 + 3 на всех станках 120, вторых деталей 60 + 90 + 80 (см. табл. 1).

Таблица

Производительность станков по двум деталям

Группы станков	Число станков	Производительность по каждому станку		Суммарная производительность	
		I деталь	II деталь	I деталь	II деталь
Фрезерные	3	10	20	30	60
Револьверные	3	20	30	60	90
Автомат	1	30	80	30	80

[1] Так как этот пример играет чисто иллюстративную роль, мы и не стара лись сделать его реальным, т. е. не подбирали данные и обстоятельства, кото рые могут встретиться в действительности.

Теперь нам нужно решить такую задачу: разбить работу,— загрузить рабочий день этих станков так, чтобы получить максимальную производительность, и при этом важно не просто произвести максимальное число деталей, но найти способ максимального выпуска комплектных изделий, т. е. комплектов, в данном случае из двух деталей. Итак, мы должны выбрать время нагрузки каждого станка таким образом, чтобы получить максимальное число готовых изделий.

Если не стараться решить задачу на максимум, а добиваться только комплектности, то можно на каждом станке производить обе детали в одинаковом количестве. Для этого достаточно разбить рабочий день каждого станка так, чтобы он произвел одинаковое число той и другой детали. Тогда оказывается, что фрезерные станки могут произвести 20 первых и 20 вторых деталей. В самом деле, на фрезерных станках производство 20 вторых деталей эквивалентно 10 первым. Револьверные станки могут произвести тогда 36 первых и 36 вторых, автомат произведет 21 первую и 21 вторую деталь, а общая производительность по всем станкам будет 77 первых и 77 вторых деталей, т. е. 77 комплектов (см. табл. 2).

Найдем теперь в данном примере наиболее целесообразный способ работы. Отношения тут различны. На фрезерном станке одна первая деталь равносильна двум вторым, на револьверном это отношение 2:3, на автомате — 3:8. Это может объясняться разными причинами: одна операция может на всех станках отнимать одинаковое время, другая операция может на автомате проходить в пять раз быстрее, чем на фрезерном станке, и т. д. Именно в связи с такими условиями эти отношения бывают различными для разных станков при обработке одних и тех же деталей. Одну деталь относительно лучше изготовлять на одном станке, другую — на другом.

Рассмотрение этих отношений сразу приводит к решению. Первую деталь нужно вырабатывать там, где ее выгоднее всего производить (на револьверных станках), а второй деталью нужно загрузить автомат. Что касается фрезерных станков, то между ними следует частично разделить производство первой и второй деталей, причем разбивку нужно произвести так, чтобы в сумме получилось одинаковое число первых и вторых деталей.

Если произвести разбивку по этому способу, то цифры будут такие: на фрезерном 26 и 6; на револьверном только 60 первых деталей, вторых не будет; и на автомате 80 вторых, первых деталей не будет вовсе. Всего получится 86 первых деталей и 86 вторых (табл. 2).

Итак, если такое перераспределение произвести, то за счет этого мы получим не очень большой, но все же существенный эффект — увеличение выработки на 11%; при этом возрастание производительности произойдет без всяких затрат.

Но эта задача решается так легко, из элементарных соображений, только в таком простом случае, когда у нас три станка и две детали. Практически в большинстве случаев приходится

иметь дело с более сложными ситуациями, и найти решение просто по здравому смыслу вряд ли можно. Трудно надеяться на то, чтобы рядовой инженер, без всякого расчета, угадал такое решение.

Таблица 2

Распределение обработки деталей по станкам

Группы станков	Простейшее решение		Наивыгоднейшее решение	
	I деталь	II деталь	I деталь	II деталь
Фрезерные	20	20	26	6
Револьверные	36	36	60	—
Автомат	21	21	—	80
Число комплектов	77	77	86	86

Чтобы выяснить, к какой математической задаче это приводит, я рассмотрю этот вопрос в более общем виде. Я приведу здесь несколько математических задач, связанных с вопросом изготовления изделий, состоящих из нескольких деталей. Что касается всех остальных областей приложения математических методов, о которых я говорил выше, то оказывается, что математические задачи всюду одни и те же, так что в других случаях мне придется только упоминать, к какой из этих задач дело сводится.

Итак, рассмотрим общий случай. Пусть у нас имеется некоторое число n станков и на них вырабатываются изделия, состоящие из m разных деталей. Предположим, что если на i-ом станке обрабатывать k-ую деталь, то мы можем произвести в день $\alpha_{i,k}$ штук деталей. Это исходные данные. (Заметим, что если на i-ом станке нельзя обрабатывать k-ую деталь, то нужно считать, что соответственное $\alpha_{i,k}=0$.)

Теперь что нам нужно? Нужно распределить работу по обработке деталей по станкам так, чтобы выработать наибольшее число комплектов деталей. Обозначим через $h_{i,k}$ то время (выраженное в частях рабочего дня), которое мы на i-ом станке будем производить k-ую деталь. Это время неизвестно; его нужно определить, исходя из условия получения максимальной продукции. Тогда для определения $h_{i,k}$ будут такие условия. Во-первых, $h_{i,k} \geqslant 0$, не отрицательны. Практически это условие совершенно очевидное, но оно должно быть отмечено, так как математически оно играет большую, затрудняющую роль. Затем, для каждого фиксированного i сумма $\sum_{k=1}^{m} h_{i,k}=1$, если суммировать от $k=1$ до m, это условие означает, что в целом — по всем деталям i-ый станок загружен полный рабочий день. Далее количество штук произведенных k-ых деталей будет $z_k=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,k}h_{i,k}$, ибо каждое произведение $\alpha_{i,k}h_{i,k}$ дает количество произведенных штук k-ой детали на i-ом станке. Желая получить комплектные изделия, мы должны требовать, чтобы все эти величины были равны между собой: $z_1=z_2=\ldots=z_k$. Общее значение этих чисел — z — и определит число изделий; оно должно быть максимальным.

Таким образом решение нашего вопроса приводит к следующей математической задаче.

Задача А. Определить числа $h_{i,k}$ $(i=1,2,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots,m)$ из следующих условий:

1) $h_{i,k}\geqslant 0$;

2) $\sum_{k=1}^{m}h_{i,k}=1\quad(i=1,2,\ldots,n)$;

3) если ввести обозначение

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,k}h_{i,k}=z_k,$$

то $h_{i,k}$ должны быть подобраны так, чтобы величины $z_1,z_2,\ldots,z_m$ были равны между собой и при этом их общее значение $z=z_1=z_2=\ldots=z_m$ имело максимальную возможную величину.

Точно к той же задаче А приводит вопрос о распределении по станкам различных операций над одной данной деталью, если при ее обработке требуется несколько операций и каждая из них может быть выполнена на нескольких станках. Вся разница здесь в том, что $\alpha_{i,k}$ будет обозначать теперь выработку i-го станка на k-ой операции, а $h_{i,k}$ — время, на которое следует его занять под эту операцию.

Возможны некоторые варианты задачи А.

Например, если у нас имеется не одно, а два изделия, тогда будут детали, составляющие первое изделие, и детали, составляющие второе изделие. Обозначим через z число штук первого изделия, а через y число штук второго изделия. В таком случае, если нам ассортимент не задан, а нужен только максимальный выпуск продукции в ценностном выражении, то если a руб. будет стоимость первого и b руб. второго изделия, очевидно, нам нужно искать максимум величины $az+by$.

Другая задача — это если имеется то или иное лимитирующее условие, например, если при обработке в каждом процессе есть своя величина расхода электроэнергии. Пусть при (i,k)-ом процессе (при обработке k-ой детали на i-ом станке) расход энергии будет $c_{i,k}$ kWh за рабочий день. Общий расход электроэнергии будет выражаться тогда суммой $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}h_{i,k}c_{i,k}$, и мы можем требовать, чтобы эта величина не превосходила определенной величины C, т. е. расхода, которым мы располагаем.

Таким образом мы приходим к следующей математической задаче.

Задача В. Найти числа $h_{i,k}$ из условий 1), 2), 3) задачи А и условия 4) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}c_{i,k}h_{i,k}\leqslant C$.

Заметим, что $c_{i,k}$ могут в этом случае обозначать и другие величины, например, число обслуживающих людей в (i,k)-ом процессе. Тогда, если мы располагаем определенным числом человеко-дней, то это может быть ограничивающим условием и приведет нас к задаче В. Может быть ограничивающим условием расход воды в каждом процессе, если необходимо, чтобы он не превзошел определенной величины, которой мы располагаем.

Другой вопрос — задача С; эта задача состоит в следующем. Предположим, что на одном и том же станке возможно обрабатывать одновременно несколько деталей (или производить несколько операций над одной деталью) и при этом мы можем несколькими различными способами организовать производственный процесс. Один вариант — на этом станке будет обрабатываться три таких-то детали; другой вариант — можно обрабатывать на нем две других детали и т. д. Тогда задача получается несколько более сложная, а именно: пусть мы на i-ом станке при l-ом способе организации производства можем получить $\gamma_{i,k,l}$ штук k-ой детали, т. е. одновременно $\gamma_{i,1,l}$ штук первой детали, $\gamma_{i,2,l}$ штук второй и т. д. за рабочий день (некоторые из $\gamma_{i,k,l}$ могут быть равны нулю).

Тогда, если обозначить через $h_{i,l}$ неизвестное время работы i-го станка по l-му способу, то число штук z_k произведенных на всех станках k-ых деталей выразится более сложным, чем раньше способом, именно: $z_k=\sum_{i,l}\gamma_{i,k,l}h_{i,l}$. И опять задача приводится к вопросу нахождения максимального числа целых комплектов z при условии равенства $z_1=z_2=\ldots=z_m$. Таким образом имеем задачу С.

Задача С. Найти числа $h_{i,l}$ из условий:

1) $h_{i,l}\geqslant 0$;

2) $\sum_{l}h_{i,l}=1$;

3) если положить $z_k=\sum_{i,l}\gamma_{i,k,l}h_{i,l}$, то должно быть $z_1=z_2=\ldots=z_m$ и их общая величина z должна получить максимальное возможное для нее значение.

Затем возможен такой вариант задачи, когда допускается некомплектное производство, например, некомплектные детали надо докупать по более дорогой цене, или сверхкомплектные детали дешевле оцениваются, чем общий комплект, и потому для оценки стоимости продукции играет существенную роль число полных комплектов. Но я не буду упоминать все подобные случаи.

Остановлюсь теперь несколько на вопросе о способах решения этих задач. Как я уже упоминал, общие математические методы приводят к пути, который никак не может быть применен практически. Мною были найдены первоначально некоторые специальные приемы, которые были более эффективны, но все же достаточно сложны. Однако после этого удалось найти весьма универсальный метод, который применим как к задачам А, В, С, так и к остальным задачам такого рода. Этот метод — метод разрешающих множителей. Укажем его идею. Для определенности остановлюсь на задаче А. Метод основан на следующем факте. Оказывается, существуют такие множители $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, отвечающие каждой детали, что их нахождение почти сразу приводит к решению задачи. Именно, если для каждого данного i рассмотреть произведения $\lambda_1\alpha_{i,1}, \lambda_2\alpha_{i,2}, \ldots, \lambda_m\alpha_{i,m}$ и выделить те k, для которых произведение максимально, то для всех прочих k можно принять $h_{i,k}=0$. Что касается немногих выделенных значений $h_{i,k}$, то они легко могут быть определены из условий $\sum_{k=1}^{m} h_{i,k}=1$ и $z_1=z_2=\ldots=z_m$. Найденные таким образом $h_{i,k}$ и дают максимум z — решение задачи. Таким образом, вместо нахождения большого числа nm неизвестных $h_{i,k}$, оказывается возможным разыскивать всего m неизвестных λ_k; в конкретном случае, например, вместо 32 только 4 неизвестных (см. ниже пример 2). Что касается множителей λ_k, то их можно найти без особого труда последовательными приближениями. Все решение осуществляется сравнительно просто; оно оказывается не сложнее обычного технического расчета. В зависимости от сложности случая, процесс решения может занимать от четверти до 5—6 часов.

Я не буду здесь останавливаться на деталях этого решения, скажу лишь основное: решение делается вполне осуществимым практически. Что касается контроля решения, то он еще проще. Если решение найдено, то проконтролировать правильность его можно в 10—15 минут.[1]

Я хочу еще отметить тот факт, имеющий практическое значение, что получающиеся в решении числа $h_{i,k}$ в большинстве равны нулю. Благодаря этому каждый станок приходится занимать только под одну-две детали в течение дня, т. е. решение не получается практически неосуществимым, когда $\frac{1}{2}$ часа станок обрабатывает одну деталь, а $\frac{3}{4}$ часа другую. Практически получается очень удачное решение: большинство станков работает целый день на одном виде деталей, и только на двух-трех станках происходит одна замена в течение дня. Последнее совершенно необходимо при требовании получения одинаковых количеств деталей.

Решение разобранных здесь задач, связанных с получением максимальной продукции при условии комплектности, мне кажется, может найти применение на большинстве предприятий металлообрабатывающей промышленности, а также деревообрабатывающей промышленности, ибо в обоих случаях имеются разнообразные станки разных производительностей, которые могут производить одну и ту же работу, а потому встает задача о наиболее целесообразном распределении работ по станкам.

Нахождение такого распределения, конечно, имеет смысл и возможно лишь при организации серийного производства. Для одного изделия не будет и данных о том, сколько времени продолжается выработка каждой детали на каждом станке, не будет и смысла искать это решение. Но случай серийного выпуска в металлообрабатывающей и деревообрабатывающей промышленности является типичным.

[1] Подробное изложение метода решения, проведенное и на численных примерах, в частности, решение некоторых приведенных в докладе задач, дано в приложении 1, „Метод разрешающих множителей".

II. ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВА С ОБЕСПЕЧЕНИЕМ МАКСИМАЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ ПЛАНА ПРИ УСЛОВИИ ЗАДАННОГО АССОРТИМЕНТА

Нет надобности говорить о значении выполнения плана по ассортименту в условиях планового хозяйства. Невыполнение плана по ассортименту, даже когда он выполнен по суммарным показателям (стоимости, тоннажу), недопустимо. Оно приводит к затовариванию и омертвлению средств в отношении одних видов продукции и к острому дефициту других видов, что может чрезвычайно затруднить и даже сорвать работу предприятий, связанных с данным. Поэтому предприятие, выполняя план, перевыполняя или даже недовыполняя его, обязано выдерживать установленное государством соотношение между отдельными видами продукции. В настоящее время невыполнение плана по ассортименту является грехом многих предприятий. Поэтому вопрос об организации производства, обеспечивающей максимальный выпуск продукции заданного ассортимента, представляется весьма актуальным.

Рассмотрим этот вопрос в следующих условиях. Пусть имеется n станков (или групп станков), на которых может вырабатываться m разных видов продукции. Пусть производительность i-го станка есть $\alpha^*_{i,k}$ единиц продукции k-го вида за рабочий день. Требуется установить такую организацию работы станков, при которой был бы обеспечен максимальный выпуск продукции при заданном соотношении $p_1:p_2:\ldots:p_m$ между отдельными видами ее. Тогда, если обозначить через $h_{i,k}$ время, которое i-ый станок (или группа станков) занят под k-ый вид продукции, то для определения $h_{i,k}$ имеем условия:

$$1)\ h_{i,k} \geqslant 0; \quad 2)\ \sum_{k=1}^{m} h_{i,k} = 1; \quad 3)\ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} h_{i,1}\overset{*}{\alpha}_{i,1}}{p_1} = \ldots = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} h_{i,m}\overset{*}{\alpha}_{i,m}}{p_m},$$

причем общее значение последних отношений максимально. Стоит только теперь принять $\alpha_{i,k} = \frac{1}{p_k}\overset{*}{\alpha}_{i,k}$ и последнее условие примет вид условия 3) задачи А, и таким образом задача приводится к рассмотренной выше задаче А.

Пример 2. Как раз первый вопрос, с которого я начал свою работу, предложенный центральной лабораторией Фанерного треста, относился именно к этой задаче — максимальному выпуску продукции данного ассортимента. Нами был решен конкретный пример. Работа эта недавно сдана лаборатории. Там был такой случай: имеется восемь лущильных станков и пять различных номенклатур материала. Производительность каждого станка по каждой номенклатуре материала дана в табл. 3.

Таблица 3

№ станка	Номенклатуры				
	1	2	3	4	5
1	4,0	7,0	8,5	13,0	16,5
2	4,5	7,8	9,7	13,7	17,5
3	5,0	8,0	10,0	14,8	18,0
4	4,0	7,0	9,0	13,5	17,0
5	3,5	6,5	8,5	12,7	16,0
6	3,0	6,0	8,0	13,5	15,0
7	4,0	7,0	9,0	14,0	17,0
8	5,0	8,0	10,0	14,8	18,0

Требовалось установить распределение, обеспечивающее максимальную выработку при условии, что материал 1-й номенклатуры составляет 10%, 2-й — 12%, 3-й — 28%, 4-й — 36%, 5-й — 14%.

Решение для этой задачи, найденное по нашему методу А. И. Юдиным,[1] приводит к следующим значениям $h_{i,k}$ — распределению времени работы (в долях рабочего дня) по каждой номенклатуре материала (табл. 4).

В смысле получения эффекта обстоятельства здесь были сравнительно неблагоприятные в том отношении, что условия работы на всех станках были, примерно, одинаковые; все же получилось увеличение выпуска продукции по сравнению с наглядным решением (если на каждом станке выдержать соотношение по ассор-

[1] Подробное изложение хода решения этой задачи дано в приложении 2.

тименту) в размере 5%. В других случаях, где бо́льшая вариация производительности по видам материалов, такое решение может дать и больший эффект. Но даже увеличение на 5%, достигаемое без всяких затрат, имеет практическое значение.

Таблица 4

№ станка	Номенклатуры				
	1	2	3	4	5
1	0	0,3321	0	0	0,6679
2	0	0,9129	0,0871	0	0
3	0,5744	0	0,4256	0	0
4	0	0	0,9380	0,0620	0
5	0	0	1	0	0
6	0	0	0	1	0
7	0	0	0	1	0
8	1	0	0	0	0

Затем я хочу еще указать на значение этого вопроса для кооперирования предприятий. В приведенном выше примере производства двух деталей (раздел I) мы получали на разных станках разные соотношения между выработками деталей. Может оказаться, что на одном предприятии А приходится делать такое число вторых деталей, или соотношение числа имеющихся станков таково, что автомат, где выгоднее всего производить вторую деталь, приходится частично занять под первую деталь, а на другом предприятии В, наоборот, на револьверном станке, где выгоднее всего производить первые детали, частично приходится производить вторые детали. Тогда ясно, что выгоднее кооперировать эти заводы так, чтобы часть выпуска первой детали передать с завода А на завод В, а часть выпуска второй детали с завода В на завод А. В простом случае эти вопросы решаются элементарно, но в сложном случае вопрос о том, когда выгодно кооперировать и как кооперировать заводы, может разрешаться именно на основе нашего метода.

Таким же образом дело обстоит и с распределением плана данного треста или отрасли по разным предприятиям. Можно значительно увеличить выпуск продукции, если распределение это проводить целесообразно, т. е. каждому предприятию давать то изделие, которое максимально подходит к его оборудованию. Этот тезис конечно общеизвестен и общепризнан, но обычно, когда его приводят, не дают отчетливых указаний, как решать вопрос о том, к какому оборудованию больше подходит данное изделие. При наличии достаточных данных наши методы дают определенные способы для точного решения таких вопросов.

III. НАИБОЛЕЕ ПОЛНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ

Многие работы могут производиться одними и теми же механизмами. Например, есть много способов производства земляных работ; так, для экскавации применяются следующие механизмы: экскаваторы ковшовые, дитчеры, грейферы, гидромониторы — целый ряд экскаваторов разных систем и разных видов, и в разных условиях они дают различный эффект. Последний находится в зависимости от вида грунта, размеров котлована, условий транспорта отработанной земли и т. д. Например, канавы удобнее рыть одним экскаватором, глубокие котлованы — другим, мелкие котлованы — третьим; разрабатывать песок удобнее одним экскаватором, глину — другим и т. д. От всех этих обстоятельств зависит производительность каждого механизма по каждому виду работы.

Рассмотрим теперь такую задачу. Имеется данный комплекс работ и определенный наличный парк механизмов; требуется эти работы произвести в кратчайший возможный срок. В таких конкретных условиях иногда приходится производить работы и не тем механизмом, который наиболее подходит для данной работы, если, например, такого механизма нет в наличии, или он относительно перегружен. Однако возможно решение вопроса о наиболее целесообразной расстановке механизмов, при которой они развили бы наибольшую, возможную в данных конкретных условиях, производительность. Составляя условия, как в двух предыдущих случаях, можем убедиться, что решение вопроса приводится к задаче А.

Поясним теперь эти общие соображения двумя конкретными примерами. Первый относится к земляным работам, второй — к плотничным.

П р и м е р 3. Имеются три вида земляных работ — I, II и III и три экскаватора — A, B, C. Нужно произвести по 20 000 м³ работ каждого вида и распределить эти работы между экскаваторами наиболее целесообразным образом. Нормы выработки (в м/час), по каждому виду работ указаны в табл. 5 (нормы даны жирными цифрами).

Таблица 5

Виды работ	Механизм работ									
	Экскаватор A			Экскаватор B			Экскаватор C			Σ
I	—	**105**	190	—	**107**	—	312	**64**	—	20 000
II	—	**56**	92	302	**66**	222	—	**38**	—	20 000
III	322	**56**	—	20	**83**	60	10	**53**	282	20 000
Всего часов	322		282	322		282	322		282	

Наиболее целесообразное размещение механизмов, найденное нашим методом, указано в той же таблице, а именно: цифры, стоящие в каждой клетке справа, показывают время, которое каждый механизм должен быть занят на соответственном виде работ. Так например, экскаватор A на 190 часов должен быть поставлен на I вид работ и на 92 часа на II вид. Вся совокупность работ при этом размещении при условии выполнения норм может быть произведена за 282 часа. Для сравнения в каждой клетке слева приведен другой — „неудачный“ способ размещения механизмов. При таком размещении при тех же условиях указанные работы будут выполнены за 322 часа, т. е. перерасход времени, а в связи с этим горючего, средств и пр., составит 14%, если сравнивать с первым — наивыгоднейшим вариантом. Отметим, что и при этом втором варианте нормы выполнены, производство работ идет единым фронтом, механизмы полностью использованы, поэтому „неудачность“ его могла быть обнаружена не при пользовании обычными показателями, а только если специально было обращено внимание на вопрос о наиболее целесообразной расстановке механизмов.

П р и м е р 4. Имеются следующие виды работ:

1) поперечная распиловка досок 4,5 м, 2 × 14 — 10 000 перепилов;
2) „ „ „ 6,5 „ 4 × 30 — 5 000 „
3) продольная „ „ 2 „ 4 × 15 — 4 000 пог. м

Наличные снаряды:
1) маятниковых пил 2
2) циркульная пила с ручной подачей 1
3) дисковых электропил 10
4) лучковых пил 20

Нормы выработки (в перепилах и в пог. м/час) приведены в табл. 6. В этой же таблице дано наивыгоднейшее размещение работ.

Таблица 6[1]

Вид работ	Снаряды				Σ	Σ × 5,65
	Маятниковые пилы (2 шт.)	Циркульная пила с ручной подачей (1 шт.)	Дисковых электропил (10 шт.)	Лучковых пил (20 шт.)		
I	400 × 2	—	167 × 3	59 × 9	1830	10 000
II	213 × 0	—	125 × 7	38 × 0	875	5 000
III	—	475 × 1	52 × 0	23 × 11	725	4 000

[1] Нормы выработки взяты из книги „Единые нормы выработки и расценки на строительные работы. 1939 г. Отдел 6. Плотничные работы“.

В табл. 6 первая цифра в каждом квадрате показывает норму снаряда на соответствующей номенклатуре материала (в перепилах или в пог. м/час.). Множитель при этих нормах показывает число снарядов, занятых на соответствующей работе, в частности, нулевой множитель показывает, что данный снаряд на соответствующей работе не используется. При этом наивыгоднейшем распределении все работы могут быть выполнены за 5,65 часа.

Заметим, что распределение механизмов возможно производить не по видам работ, а по отдельным работам, т. е. составив список необходимых работ и определив время, потребное каждому механизму, чтобы произвести каждую из них (включая и время на подготовительные операции), распределить работы между механизмами так, чтобы они были выполнены в кратчайшее время или в заданный срок, но с наименьшей стоимостью.

Возможны и другие вариации в постановке вопросов, например выполнить данную совокупность работ в заданный срок наличными механизмами с наименьшим расходом электроэнергии.

Те же вопросы размещения механизмов могут решаться также, когда, например, машины работают на электрической энергии, и мы ограничены условием, что используемая мощность не должна превзойти заданной, или число обслуживающих людей ограничено, или ограничен суточный дебет воды при гидромеханическом способе разработки грунта и т. д. Эти вопросы приводят к задаче B.

Возможно применение тех же методов и в вопросах, где речь идет не об использовании наличных механизмов, а о подборе наиболее подходящих для производства той или иной совокупности работ.

Мы полагаем, что кроме земляных и иных работ в строительстве этот метод может найти применение и в других отраслях промышленности.

В топливо-добывающей промышленности — врубовые машины разных систем в разных условиях, в зависимости от мощности пласта, условий транспорта и пр., развивают разную производительность. Наиболее целесообразное размещение парка механизмов может дать и здесь определенный эффект.

Добывание торфа возможно разными способами, причем для различных видов торфа они имеют различную эффективность. Поэтому возникает проблема: наиболее целесообразно распределить наличные средства по торфяным полям в целях получения максимального выпуска продукции. Эта проблема также может быть решена нашими методами.

И в сельском хозяйстве разные работы могут выполняться комбайнами, молотилками, сноповязалками, при этом некоторые машины (например комбайны) выполняют целый комплекс работ. В этом случае вопрос распределения сельскохозяйственных машин приводит к задаче C.

IV. МАКСИМАЛЬНОЕ УМЕНЬШЕНИЕ ОТХОДОВ

Очень многие материалы, используемые в промышленности и строительстве, поступают в виде целых единиц (листы стекла, жести, фанеры, бумаги, кровельного и листового железа; бревна, доски, балки, арматура, болванки и т. д.). При использовании их непосредственно или в качестве заготовок для изделий приходится эти единицы разделить на части необходимых размеров. При этом, как правило, образуются отходы, и фактически используемые материалы составляют лишь определенный процент всего количества, — остальное идет в отходы.[1] Правда, во многих случаях отходы также находят себе применение, но их использование либо требует дополнительных затрат (на сваривание, переплавку и т. п.) и связано с потерями, либо они используются в качестве гораздо менее ценного продукта, чем основной (отходы строевого леса на топливо и т. п.). Поэтому уменьшение отходов является весьма актуальным, так как оно позволило бы сократить нормы расходования дефицитных материалов.

Наши методы могут найти здесь применение при следующих обстоятельствах. Пусть имеется одна или несколько партий материала, из которых нужно приготовить части заданного размера, причем количество штук каждой части должны иметь предписанное отношение $p_1 : p_2 : \ldots : p_m$. Требуется получить максимальный выход продукции (например, из партии листов стекла стандартного размера изготовить наибольшее число комплектов для застекления окон). Пусть при этом существует несколько способов разделения каждой единицы на части и нужно выбрать, к какому числу единиц каждой партии какой применить способ, чтобы получились минимальные отходы. Покажем, что эта задача решается нашими методами, что она приводит к задаче C.

Пусть имеется n партий материала; i-ая партия состоит из q_i штук. Пусть требуется изготовить наибольшее число комплектов из m частей, причем в комплект входит p_1 штук первой части, $\ldots$, p_m штук m-ой части.

Возможно несколько способов для разрезания единицы каждой партии. Пусть при l-ом способе разрезания единицы i-ой партии получается $\gamma_{i,k,l}$ штук k-ых частей ($\gamma_{i,1,l}$ штук первой части, $\gamma_{i,2,l}$ штук второй и т. д.). Тогда, если через $h_{i,l}$ обозначить число единиц i-ой партии, которое следует разделить по

---

[1] Чтобы показать величину потерь этого рода, приведу для иллюстрации такой факт: на заводе „Электросила“ им. С. М. Кирова „В первом квартале этого года, например, из-за неправильного нерационального раскроя динамного железа завод потерял 580 т металла — 367 тыс. рублей!“ („Лен. Правда“, 8 июня, 1939 г.)

*

l-ому способу, то для определения неизвестных $h_{i,l}$ имеем следующие условия:

$$1)\ h_{i,l} \geqslant 0 \text{ целые}; \quad 2)\ \sum_l h_{i,l} = q_i \text{ и}$$

$$3)\ \frac{\sum\limits_{i,l} \gamma_{i,1,l} h_{i,l}}{p_1} = \frac{\sum\limits_{i,l} \gamma_{i,2,l} h_{i,l}}{p_2} = \ldots = \frac{\sum\limits_{i,l} \gamma_{i,m,l} h_{i,l}}{p_m}$$

и их общее значение имеет максимальную возможную величину.

Ясно, что простым изменением обозначений можно эту задачу свести к задаче С.

Приведенные общие рассуждения поясним примером, относящимся к простейшей задаче разрезания единиц линейных размеров.

Пример 5. Требуется изготовить 100 комплектов арматуры (досок, бревен) длиной $2{,}9+2{,}1+1{,}5$ м из стержней длины 7,4 м.

Простейший способ решения — это из каждого стержня изготовить по комплекту $7{,}4=2{,}9+2{,}1+1{,}5+0{,}9$, и тогда концы в 0,9 м пойдут в отход. При этом способе потребуется 100 стержней и отходы составят $100 \times 0{,}9$ м $=90$ м.

Теперь приведем наиболее целесообразное решение. Рассмотрим различные способы разрезания стержня в 7,4 м на части указанных размеров: 2,9; 2,1; 1,5. Эти способы сведены в табл. 7.

Таблица 7

I	II	III	IV	V	VI
2,9 1,5 1,5 1,5	2,9 2,9 1,5	2,1 2,1 1,5 1,5	2,9 2,1 2,1	1,5 1,5 1,5 2,1	2,9 2,1 1,5
7,4	7,3	7,2	7,1	6,6	6,5

Среди этих способов имеется I способ, при котором вовсе не образуется отходов, но воспользоваться только им нельзя, так как нужных комплектов мы не получим (например, стержней в 2,1 м вовсе не будет).

Решение, дающее минимальные отходы, найденное по нашему методу, будет следующее: по I способу 30 стержней, по II — 10, по IV — 50. Всего понадобится 90 стержней, вместо 100, которые нужны при простейшем способе. Отходы составят всего $10 \cdot 0{,}1+50 \cdot 0{,}3=16$ м, т. е. $16:666=2{,}4\%$. Во всяком случае это минимум того, что может быть достигнуто в данных условиях.

Рассмотрим другой вариант той же задачи с несколько видоизмененными условиями.

Пример 6. Имеется 100 стержней по 7,4 м и 50 по 6,4 м; требуется изготовить из них наибольшее число комплектов прежних размеров $2{,}9+2{,}1+1{,}5$. Способы разрезания стержней по 7,4 м даны выше; стержни по 6,4 м могут быть разрезаны следующими способами: I) $2{,}1+2{,}1+2{,}1=6{,}3$; II) $1{,}5+1{,}5+1{,}5+1{,}5=6{,}0$; III) $1{,}5+1{,}5+2{,}9=5{,}9$; IV) $2{,}9+2{,}9=5{,}8$ и т. д. Решение вопроса в данном случае будет следующее: стержней по 7,4 м: 33 по I способу, 61 по II, 5 по IV, 1 по VI; стержни по 6,4 м — все по I способу.

Всего получится 161 комплект и отходы составят:

$$61 \cdot 0{,}1+5 \cdot 0{,}3+1 \cdot 0{,}9+50 \cdot 0{,}1=13{,}5; \quad 13{,}5:1060=1{,}3\%.$$

Следует заметить по этому поводу, что обычно, если задача более сложная, то представляются бо́льшие возможности варьирования и потому по нашему методу удается достигнуть меньших отходов.

Аналогичное решение может быть получено и для других задач.

Я думаю, что в ряде случаев такое математическое решение вопроса уменьшения отходов может дать увеличение полезного использования материалов на $5-10\%$ по сравнению с тем, которое получается в настоящее время. Ввиду дефицитности всех этих материалов (арматуры, пиленого леса, листового железа и т. д.) такой эффект будет иметь значение, и стоит инженеру потратить пару часов на то, чтобы найти лучшие способы распиловки досок, а не предоставлять это дело целиком рабочим.

Я хочу также обратить внимание на возможности применения этого метода в лесообрабатывающей промышленности. Именно, там приходится решать вопросы уменьшения отходов при распиловке стволов деревьев на бревна данных размеров, доски и пр., так как отходы при этом оказываются очень большие. Значительные отходы, правда, должны быть; все же, мне кажется, что если решить этот вопрос математически и разработать правила выбора способов распиловки для стволов разных размеров, то эти отходы можно будет значительно уменьшить, и при том же сырье, том же количестве леса эти лесообрабатывающие предприятия смогут давать больше продукции.

Конечно, это случай наиболее сложный; кроме приведенных здесь соображений, в данном случае требуется еще специальная работа над применением этого метода к данным задачам. Но самая возможность его применения в этом вопросе мне представляется несомненной.

V. МАКСИМАЛЬНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСНОГО СЫРЬЯ

Если мы рассмотрим, например, нефтепереработку, то она дает разные продукты: бензин, лигроин, керосин, мазут и пр. При этом к одной и той же нефти может применяться несколько крекинг-процессов, разделяющих составные части нефти. В зависимости от того, какой крекинг-процесс к данной нефти применить, будет разный выход этих составных частей. Если данное нефтяное предприятие имеет определенный план и одну или несколько нефтей, которые к нему поступают в качестве сырья, оно должно разделить их по крекинг-процессам так, чтобы дать максимальную продукцию данного ассортимента. Легко убедиться, что решение вопроса приводится к задаче C.

Я полагаю, что нет надобности вновь вводить соответствующие обозначения, — это делается тем же способом, который был применен выше в других задачах. Я привел в качестве примера нефть, но те же обстоятельства встречаются при использовании разного рода углей и руд для выработки различных видов сталей, в том числе качественных, — подбор наиболее подходящих руд и углей, их распределение по разным видам сталей представляет ту же задачу.

С тем же вопросом сталкиваемся при обработке полиметаллических руд в химической, коксо-химической промышленности, т. е. всюду, где данное сырье может служить источником нескольких видов продуктов.

VI. НАИБОЛЕЕ РАЦИОНАЛЬНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТОПЛИВА

Разные виды топлива — нефть, каменный уголь, бурый уголь, дрова, торф, сланцы — могут сжигаться, служить источником питания разных топливопотребляющих установок и дают разный эффект. Их приходится использовать в топках электростанций, паровозов, пароходов, мелких паровых машин, для городского парового отопления и пр. В настоящее время топливо распределяется часто случайным образом, не в соответствии с тем, какие виды топлива наиболее подходят к данной топливопотребляющей установке, и возможно ли потребление этого топлива на данной установке.

Между тем эффект разных видов топлива в разных условиях различен. Например, возможно, что на электростанции 2 т бурого угля равносильны 1 т антрацита, а в условиях работы на паровозе бурый уголь значительно труднее использовать должным образом, и, возможно, что только 3 т бурого угля дадут тот же эффект, что 1 т антрацита. Это я привел для примера, но, несомненно, такие различия имеют место в действительности.

То же самое относится и к разным сортам каменного угля: в зависимости от зольности, мелкости и пр., возможность и эффективность его сжигания в разных топках различна.

И вот опять вопрос распределения топлива, наиболее целесообразного с тем, чтобы дать наиболее высокий процент обеспечения всех установок, исходя из наличных его запасов или плановой годовой его продукции, может быть решен методами нашей работы и приводит именно к задаче A.

Другой, более сложный вопрос — это, наоборот, исходя из наличного плана завоза или добычи топлива указать выбор типов

двигателей (дизели, газогенераторные установки, паровые турбины разных систем) и их процентное соотношение так, чтобы они были приспособлены к потреблению данного топлива и давали максимальный эффект в потребительских данных: в тонно-километраже для железной дороги и других видов транспорта, в киловатт-часах на электростанциях. Этот вопрос приводится к задаче C.

VII. НАИЛУЧШЕЕ ВЫПОЛНЕНИЕ ПЛАНА СТРОИТЕЛЬСТВА ПРИ НАЛИЧНЫХ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛАХ

Здесь мы хотим указать на возможности приложения наших методов в вопросах планирования строительства.

В докладе тов. Молотова на XVIII съезде ВКП(б) упоминалось о том, что, наряду с перевыполнением плана II пятилетки по основным отраслям промышленности, план строительства был недовыполнен.[1] Именно определенной части сумм, отпущенных на строительство, не удавалось освоить. Причиной в значительной степени являлось отсутствие отдельных видов материалов, специальностей рабочей силы и др., что надолго задерживало строительство или не позволяло приступить к нему, несмотря на наличие денежных средств. Нам кажется в то же время, что существующая система планирования строительства не дает максимального использования лимитирующих материалов и имеются возможности добиться большего выполнения планов строительства за счет более целесообразного распределения материалов.

Известно, что многие строительные сооружения — мосты, виадуки, промышленные здания, школы, гаражи и т. п. и их отдельные части могут быть выполнены в различных вариантах (железобетон, кирпич, крупные блоки, камень и т. д.). При этом часто несколько вариантов оказываются вполне допустимыми и даже примерно равноценными. Выбор одного из этих вариантов в таком случае производится при существующем порядке самой проектирующей организацией отдельно для каждого сооружения, причем выбор производится часто совершенно случайно, на основании того или другого незначительного преимущества одного варианта перед другим. Между тем вопрос о выборе вариантов является весьма важным, ибо в зависимости от варианта сооружения количество различных материалов, необходимых для его выполнения (цемента, железа, кирпича, извести и пр.), оказывается различным, различны и другие важные моменты (количество рабочей силы разных специальностей, необходимые строймеханизмы, транспорт и пр.).

Поэтому способом выбора вариантов сооружений в значительной степени определяется баланс материалов и пр., необходимых для выполнения всего плана строительства данного района или данной стройорганизации, а также напряженность этого

[1] „Большевик", 1939, № 5—6, стр. 96.

баланса в отдельных его частях. По нашему мнению, выбор вариантов сооружений должен производиться не случайно, не для каждого сооружения в отдельности, а одновременно для всех сооружений данного района или стройорганизации, с тем чтобы добиться максимального соответствия между балансом необходимых материалов и пр. и намеченными планом ресурсами по каждому из важнейших видов материалов. Такой порядок, нам кажется, значительно ослабил бы дефицитность лимитирующих материалов и дал бы возможность большего выполнения плана строительства.

Предлагаемый нами порядок составления плана строительства примерно таков. Проектирующие организации для каждого сооружения оставляют несколько (2—3) допустимых и наилучших вариантов и для них производят примерный подсчет необходимых материалов и других основных моментов. Таким образом, организация, планирующая строительство в данном районе, получает данные примерно по следующей схеме (см. табл. 8).

Таблица 8

Титульный список сооружений района (в порядке очередности)	Лимитирующие моменты									
	Материалы						Рабочая сила (по специальностям)	Строймеханизмы (по видам)	Транспорт	Денежные ассигнования (по статьям)
	цемент	известь	кирпич	металл	лесоматериалы					
1. Мост I вариант										
„ II „										
„ III „										
2. Школа I „										
„ II „										
3. Гараж I „										
„ II „										

После этого планирующая организация производит выбор вариантов так, чтобы баланс необходимых материалов и пр. оказался обеспеченным, запланированным на данный год производством их и чтобы в этот реальный план строительства попала максимально большая часть намеченного списка (в порядке очередности).

Что касается возможности решения задачи выбора вариантов в таких условиях, то этот вопрос приводит к задаче C с некоторыми дополнительными условиями, и во всяком случае представляет вопрос, разрешимый нашими методами даже в сравнительно сложных случаях (100—200 сооружений). Мы не останавливаемся здесь на различных деталях, как например, на расчетах между различными организациями, объединившими свои планы, а также материальные и денежные средства, — все эти вопросы также могут быть удовлетворительно разрешены.

VIII. НАИЛУЧШЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСЕВНОЙ ПЛОЩАДИ

Известно, что различие видов почвы, климатических условий и пр. дают разную приспособленность различных районов и отдельных участков земли по отношению к различным сельскохозяйственным культурам. И правильный выбор плана посева играет определенную роль. Напомню о выступлении одного из делегатов на XVIII съезде партии. Он говорил, что в его области, в северных районах гораздо лучше произрастает ячмень, а в южных районах — пшеница. Между тем Облземотдел план механически делит по всем районам соответственно площадям по всем культурам, и все равно, хотя бы у тебя плохо произрастает ячмень — сей ячмень. Но если решать вопрос о том, как целесообразнее распределять, — эта задача оказывается не такой простой.

Чтобы не быть голословным, я укажу здесь, как вопрос сводится к математической задаче. Пусть имеется n участков с площадями $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и m культур, которые по плану должны находиться в таком соотношении: $p_1 : p_2 : \ldots : p_m$. Пусть на i-ом участке ожидаемый урожай k-ой культуры равен $\alpha_{i,k}$.

Теперь надо распределить, сколько га первого участка (или первого района) занять под такую-то культуру, сколько под другую культуру и т. д., чтобы добиться максимального урожая. Обозначим через $h_{i,k}$ число га i-го участка, занимаемых под посев k-ой культуры. Тогда у нас сумма $\sum_{k=l}^{m} h_{i,k} = q_i$ равна общей площади i-го участка ($h_{i,k}$, конечно, не отрицательные величины). Число центнеров ожидаемого урожая k-ой культуры со всей площади тогда будет $z_k = \sum_{i=l}^{n} \alpha_{i,k} h_{i,k}$, и нам нужно подобрать числа z_k так, чтобы они относились как заданные числа $z_1 : p_1 = z_2 : p_2 = \ldots = z_m : p_m$, т. е. выдержать предписанное планом соотношение между культурами и получить максимальные z_k — максимальную продукцию. Эта задача приводится к задаче A. В самом деле, если мы примем $h_{i,k} q_i$ за новые неизвестные $h^*_{i,k}$ и если мы возьмем $\alpha^*_{i,k} = \frac{1}{p_k q_i} \alpha_{i,k}$, то для величин $h^*_{i,k}$ и $\alpha^*_{i,k}$ мы будем иметь в точности уравнения задачи A.

Мы рассматривали вопрос о получении максимальной урожайности на данный год. Если ставить вопрос о получении максимальной урожайности в течение ряда лет и учитывать влияние следования культур на урожайность, то вопрос оказывается более сложным и приводит к задаче C. Если часть земель поливная и на i-ом участке почвы при посеве k-ого вида культуры норма расхода воды есть $c_{i,k}$ л/сек на га, то получаем дополнительное условие $\sum_{i,k} c_{i,k} h_{i,k} \leqslant C$, если через C обозначить суммарную мощность в л/сек источников орошения, т. е. приходим к задаче В.

Наконец, мы указывали уже в разделе III, что для решения вопроса о наилучшем распределении сельскохозяйственного инвентаря по видам работы также могут быть использованы наши методы.

Следует сказать, что при применении данных методов в сельском хозяйстве все-таки нужна некоторая осторожность, потому что здесь эти данные (предполагаемая урожайность) задаются весьма приблизительно, поэтому, если они даны неправильно, то и решение может оказаться неправильным. Однако, мне кажется, что даже в таких случаях соблюдение принципа наилучшего размещения и по ориентировочным данным может лишь в отдельном каком-нибудь случае (если эти данные будут ошибочны) дать неверное решение, но в массе — в среднем этот принцип даст все же положительный эффект.

IX. НАИЛУЧШИЙ ПЛАН ПЕРЕВОЗОК

Рассмотрим прежде всего такой вопрос. Ряд грузов — нефть, хлеб, машины и т. д. — из одного пункта в другой могут перевозиться разными способами: по железной дороге, пароходом; могут быть смешанные перевозки — частью железной дорогой, частью автотранспортом и т. д. При этом, в зависимости от видов груза, способов погрузки, приспособленности транспорта и т. п., эффективность различных видов транспорта различна. Например, нефть особо выгодно перевозить водным транспортом, если имеются нефтеналивные пароходы и т. д. Решение вопроса распределения заданного грузового потока по видам транспорта с осуществлением плана перевозок в кратчайший срок или в заданный срок с наименьшим расходом топлива возможно методами нашей работы и приводит к задачам А или С.

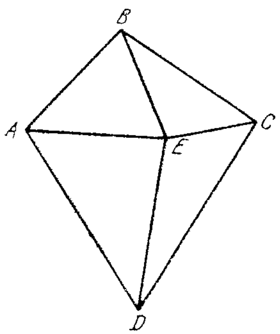

Рис. 1.

Укажем еще одну задачу другого порядка, которая хотя и не подходит непосредственно под вопросы А, В и С, но также может быть решена нашими методами; это — выбор путей перевозок.

Пусть имеется несколько пунктов A, B, C, D, E (рис. 1), которые связаны между собой железнодорожной сетью. Можно перевозку из B в D осуществлять по кратчайшему пути BED, но можно воспользоваться и другими путями, а именно: BCD и BAD. Пусть далее задан график грузовых потоков, т. е. из A в B нужно перевести такое-то число вагонов, из D в C—такое-то и т. д. Задача состоит в следующем. Задана максимальная в данных условиях (она может, конечно, меняться при новых методах работы транспорта) пропускная способность каждой до-

роги. Необходимо распределить грузовой поток по различным путям так, чтобы, учитывая при этом пустой прогон вагонов (т. е. добиваясь максимального уменьшения его) и учитывая максимальную возможную нагрузку дорог, осуществить необходимые перевозки при минимальном расходе топлива. Как уже было указано, эта задача также может быть решена нашими методами.

На этом мы закончим рассмотрение отдельных видов задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

a) Общее значение работы

Основной смысл данной работы я вижу в том, что в ней развит метод решения такого рода проблем, в которых из огромного числа различных случаев и вариантов требуется выбрать наиболее благоприятный. При этом данный метод делает решение вопроса вполне осуществимым зачастую даже в весьма сложных случаях, где выбор наиболее благоприятного варианта приходится производить из миллионов или даже миллиардов мыслимых возможностей; и при этом приходится еще учитывать различные дополнительные условия.

Общеизвестно, что такого рода вопросы встречаются постоянно в технико-экономических проблемах, в особенности, связанных с организацией и планированием производства. Многие из этих проблем подходят непосредственно под задачи А, В и С, рассмотренные выше, и потому могут решаться нашими методами. Многие другие проблемы приводят к математическим задачам, отличным от этих, но также разрешимым теми же методами.

До сих пор все эти технико-экономические проблемы решались довольно случайно, на-глаз, по чутью, и, конечно, получаемое решение лишь в редких случаях было наилучшим. При этом проблема нахождения наивыгоднейшего решения часто даже не ставилась, а когда она и ставилась, решить ее в большинстве случаев не удавалось. Теперь открывается возможность в ряде случаев для таких проблем получать не случайное решение, а определенным научно обоснованным путем находить наивыгоднейшее решение.

b) Пути дальнейшего исследования

В своем настоящем виде эта работа, конечно, является далеко не законченной и в большой степени не отвечает тем задачам, которые она должна ставить перед собой. Данная работа является только предварительной наметкой будущего обстоятельного сочинения на эту тему, в котором сможет быть освещена достаточно полно та важная проблема, которая пока в значительной мере только ставится. Однако, чтобы к этому притти, нужны еще дальнейшие большие исследования, проводимые притом соединенными усилиями математиков и работников производства.

И в математическом отношении многое еще остается для дальнейшего, хотя и сделан важный шаг — дан весьма универсальный и достаточно эффективный метод решения широкого класса проблем. В дальнейшем нужно определить объем приложимости метода, указать дальнейшие задачи, разрешимые с помощью него; разработать детали техники применения метода;[1] особенности этой техники в различных конкретных условиях; разработать более простые приемы, позволяющие находить, хотя и не самое наивыгоднейшее решение, но решение, весьма близкое к нему и практически с ним равноценное; усовершенствовать способ изложения метода и пр. Еще большие усилия требуются, чтобы добиться действительного использования этой работы, со стороны техников — специалистов различных отраслей народного хозяйства.

Прежде всего нужно определить те вопросы в различных областях народного хозяйства, где приложимость наших методов представляется наиболее возможной и реальной. Некоторую попытку очертить и наметить эти вопросы мы сделали в данной работе, но, конечно, трудно ожидать, чтобы она была вполне удачной и не встретила критики со стороны специалистов. Некоторые из этих вопросов, возможно, будут в дальнейшем признаны нереальными или неактуальными, в другие — внесены существенные коррективы и дополнения; наконец, несомненно, будет указан ряд других вопросов, которые вовсе выпали из нашего внимания.

Несмотря на это, мы сочли нужным такую попытку сделать, полагая, что для инженера наши методы и задачи станут более понятными и доступными, если они будут связаны с конкретными практическими вопросами. Указание же большого числа таких вопросов разнообразного характера позволит ему лучше представить себе и очертить тот круг вопросов, где наши методы приложимы, и тем самым поможет отыскать или поставить различные подобные вопросы в области его специальности, т. е. облегчит возможность творческого применения этих методов.

После того как будут выявлены определенные области, где приложимость математических методов целесообразна, встанет вопрос о разработке специфики применения этих методов в данных вопросах. Сюда относятся: точное выяснение обстоятельств, при которых эти методы способны давать значительный эффект и их применение „показано"; разработка специальных технических данных, которые нужны для применения этих методов; обработка этих данных в виде удобных для использования таблиц; разработка деталей самого метода специально для задач, встречающихся в данной области (указание на правило выбора первого приближения и пр.) и т. д.

[1] Заметим, что мы не ожидаем, чтобы на пути усовершенствования метода можно было бы пойти очень далеко; например, чтобы вместо способа расчета, который предлагается нами, были бы указаны разрешающие формулы, таблицы или номограммы. Дело в том, что в постановке вопроса участвует большое число (до 40) различных данных, играющих притом индивидуальную роль, а в таких условиях решение в виде формул или таблиц представляется невероятным.

с) Ответ на некоторые принципиальные возражения

Как мы уже указывали, мы считаем вполне вероятным, что те или иные разобранные нами примеры (а возможно и целые области вопросов) встретят возражения со стороны специалистов. Мы признаем возможным, что в отдельных случаях эти возражения могут быть настолько обоснованными, что заставят нас отказаться от какой-либо области приложений. Однако, наряду с этим специальными частными возражениями, нам пришлось (несмотря на весьма благоприятное мнение большинства) встретиться с отдельными возражениями общего характера, по существу, сводящихся к принципиальному отрицанию возможности применения математических методов в технико-экономических вопросах из области организации и планирования. Вот эти общие возражения я и хочу здесь рассмотреть.

Первое из них состоит в следующем. При рассмотрении различных конкретных практических задач обстановка настолько сложна, имеется столько привходящих обстоятельств, что учесть все это математически невозможно, а если это и удастся, то полученные уравнения все равно нельзя будет разрешить.

По этому поводу можем сделать два замечания. Во-первых, как мы уже упоминали, рассматриваемый метод является весьма мощным и гибким, т. е. допускает решение в довольно сложной обстановке при учете ряда дополнительных условий и притом допускает различные вариации при использовании его (так что всегда можно выбрать наиболее подходящий способ его применения).

Во-вторых, если некоторые практические детали и не учтены, то после того, как наивыгоднейшее решение найдено, можно внести в него коррективы, учитывающие и эти детали. Это тем более возможно, что данный метод одновременно с нахождением наивыгоднейшего варианта показывает, какие варианты дают решение, близкое к наивыгоднейшему, и потому имеется возможность при внесении этих коррективов лишь немного отойти по эффективности от наивыгоднейшего варианта.

Следует еще сказать, что приведенное возражение могло быть с таким же успехом высказано и вообще по отношению к применению теоретических, в частности, математических методов в технических вопросах. Между тем известно, как ценят техники даже самую грубую теоретическую схему явления, учитывающую хотя бы один из важных его моментов, ибо такая схема является всегда ценным направляющим моментом и при экспериментах, и в расчете, и при проектировании. Тем более должен быть ценным метод, позволяющий в сложной обстановке учесть целый ряд условий.

Второе возражение состоит в том, что для применения метода необходимо иметь большое число различных данных ($\alpha_{i,k}$ в задаче А и т. п.), а таких данных может не оказаться, и тогда метод не применим.

На это следует ответить, что данные, которые нам нужны (норма выработки на различных станках и механизмах, количества наличных материалов и их свойства и пр.), необходимы для всяких других целей — нормирования, зарплаты, норм расходования материалов, отчетов и пр. — и должны быть на всяком нормально работающем предприятии. Короче говоря, они в такой же мере необходимы для составления какого бы то ни было плана, как и для составления по нашему методу плана наилучшего, а потому предприятие должно этими данными располагать.

В некоторых случаях все же оказывается, что таких данных нет; например, материал на стройку должен прибыть, какой точно — не известно, но во всяком случае он должен быть в тот же день пущен в работу. Или материалы присланы не те, которые были запланированы, и т. п. Конечно, в тех немногих предприятиях, где царит такая „примитивная“ бесхозяйственность, никакое планирование, а тем более наиболее целесообразное, невозможно. Но, если желание применить наши методы послужит лишним стимулом для ликвидации такой бесхозяйственности, то это только довод в пользу этих методов.

Третье возражение состоит в том, что исходные данные в ряде случаев сомнительны и известны лишь весьма приближенно (например, урожайность разных культур, расход воды при гидромеханической разработке грунтов и другие данные в некоторых приведенных выше примерах), поэтому и расчет, основанный на этих данных, может оказаться неверным.

Здесь прежде всего нужно сказать, что теми же данными приходится пользоваться и при всяком другом способе выбора плана и нет причин думать, что их сомнительность и неточность сыграет большую отрицательную роль для плана, выбранного наиболее целесообразно, чем для плана, случайно выбранного.

Все же мы не исключаем возможности, что в отдельном случае найденный по нашему методу наиболее целесообразный вариант плана на самом деле, в результате неверных данных, таковым не окажется.

Однако мы полагаем, что при массовом применении выбор наиболее благоприятных вариантов, даже при таких сомнительных данных, даст, благодаря статистическому эффекту, положительный результат. Поясним эту мысль следующим простым примером. Если мы из двух яиц выберем большее, такой выбор может быть и неудачным — оно может оказаться тухлым. Но если мы из ящика в 1000 яиц отберем 500 самых крупных и выберем эту половину, то совершенно невероятно, чтобы такой выбор оказался неправильным.

Четвертое возражение состоит в том, что эффект, получаемый при переходе от обычно выбранного варианта к наилучшему, сравнительно небольшой, во многих случаях всего 4—5%.

Тут нужно сказать, во-первых, что применение наилучшего варианта не требует никаких дополнительных затрат по сравнению с обычным, кроме совершенно незначительных расходов на вычисления. Во-вторых, применений метода можно ожидать не в одном случайном вопросе, а во многих, возможно даже в большинстве отраслей народного хозяйства, а в таком случае не только 1%, но каждая десятая доля процента несет за собой огромные суммы.

Пятое возражение заключается в том, что в ряде случаев применение метода представляется невозможным вследствие различных препятствий организационного характера, связанных с принятым порядком утверждения планов, смет и пр.; например, если те или иные материалы или механизмы уже распределены определенным образом между предприятиями, то это распределение не может быть изменено в течение данного квартала и т. д.

Это возражение, конечно, не существенно. Если будет общепризнано, что применение наиболее целесообразного плана способно дать значительный народно-хозяйственный эффект, но для его проведения необходимо некоторое изменение порядка утверждения смет, проектов или планов, то можно не сомневаться в том, что такое изменение будет сделано.

МЕТОД РАЗРЕШАЮЩИХ МНОЖИТЕЛЕЙ

Здесь мы имеем в виду дать подробное изложение того метода разрешающих множителей, о котором упоминалось в разделе I и который, по нашему мнению, является наиболее эффективным как для решения задач A, B и C, так и для многих других задач аналогичного характера, связанных с выбором наиболее благоприятного варианта из весьма большого числа возможных. Мы рассмотрим при этом главным образом применение этого метода к основной задаче — задаче A, хотя в дальнейшем говорим и о других задачах.

1. Решение задачи A для $m=2$. Общая идея метода

Рассмотрим сначала задачу A для простейшего случая, когда $m=2$ (две детали). В этом случае задача принимает вид: найти числа $h_{i,1}$ и $h_{i,2}$ из условий:

$$1)\ h_{i,1};\ h_{i,2}\geq 0;\qquad 2)\ h_{i,1}+h_{i,2}=1;\qquad 3)\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,1}h_{i,1}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,2}h_{i,2}$$

и их общее значение z имеет максимальную возможную величину.

Рассмотрим отношение $\frac{\alpha_{i,2}}{\alpha_{i,1}}=k_i$ для всех i (отношения производительностей каждого станка по I и II детали). Таким образом, на первом станке единица I детали равносильна k_1 единицам II детали, на втором единица I детали равносильна k_2 единицам II детали и т. д. Можем считать, что отношения $k_1, k_2, \ldots$ идут в порядке возрастания $k_1\leqslant k_2\leqslant\ldots$; если бы это было не так, то мы могли бы добиться этого, изменяя нумерацию станков, а именно: достаточно было бы расположить эти отношения в порядке возрастания, а затем тот станок, для которого отношение наименьшее, назвать первым и т. д. Итак считаем, что у нас неравенства $k_1\leqslant k_2\ldots$ выполнены. Ясно, что относительно выгоднее всего производить I деталь на первом станке, так как снятие одной детали с этого станка позволит заменить ее всего

k_1 штук II деталей, в то время как на всех остальных соответствующие числа $k_2, k_3, \ldots$ больше k_1. На втором станке I деталь производить менее выгодно, чем на первом, но выгоднее, чем на всех остальных. Отсюда понятно, что первые станки следует отвести под I деталь, а последние под II, т. е. в первых случаях нужно принять $h_{i,1}=1$; $h_{i,2}=0$, а в последних $h_{i,1}=0$; $h_{i,2}=1$; при этом суммарные производительности по обеим деталям должны быть одинаковы. Исходя из этого требования, подбираем число s так, чтобы было

$$\sum_{i=1}^{s-1}\alpha_{i,1}<\sum_{i=s}^{n}\alpha_{i,2};$$

$$\sum_{i=1}^{s}\alpha_{i,1}\geqslant\sum_{i=s+1}^{n}\alpha_{i,2};$$

это означает, что отвести $(s-1)$ станок под I деталь мало (производительность по II будет больше), а отвести s достаточно или много. Тогда ясно, что, беря $h_{i,1}=1, h_{i,2}=0$ для $i=1,2,\ldots,s-1$; $h_{i,1}=0$, $h_{i,2}=1$ для $i=s+1,\ldots,n$ и определяя $h_{s,1}$ и $h_{s,2}$ из условий

$$h_{s,1}+h_{s,2}=1;$$

$$\sum_{i=1}^{s-1}\alpha_{i,1}+h_{s,1}\alpha_{s,1}=\sum_{i=s+1}^{n}\alpha_{i,2}+h_{s,2}\alpha_{s,2},$$

и получим решение нашей задачи.

Применим этот процесс решения к нашему первому примеру (стр. 7—9). Производительности по группам станков там были следующие (табл. 1).

Таблица 1

Детали	Группы станков		
	Фрезерные	Револьверные	Автоматические
I	30	60	30
II	60	90	80

Отношения у нас будут $\frac{60}{30}=2$; $\frac{90}{60}=\frac{3}{2}$; $\frac{80}{30}=\frac{8}{3}$, или в порядке возрастания их величины $\frac{3}{2}<2<\frac{8}{3}$. Расположив производительности в этом же порядке (револьверные — фрезерные — автомат), получаем такие значения для $\alpha_{i,k}$:

$$\alpha_{1,1}=60;\quad \alpha_{2,1}=30;\quad \alpha_{3,1}=30;$$

$$\alpha_{1,2}=90;\quad \alpha_{2,2}=60;\quad \alpha_{3,2}=80.$$

Беря $s=2$, получаем:

$$\sum_{i=1}^{s-1} \alpha_{i,1} = \alpha_{1,1} = 60 < \sum_{i=s}^{n} \alpha_{i,2} = \alpha_{2,2} + \alpha_{3,2} = 140;$$

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_{i,1} = \alpha_{1,1} + \alpha_{2,1} = 90 > \sum_{i=s+1}^{n} \alpha_{i,2} = \alpha_{3,2} = 80.$$

Следовательно

$$h_{1,1}=1; \quad h_{1,2}=0; \quad h_{3,1}=0; \quad h_{3,2}=1.$$

Для определения $h_{2,1}$ и $h_{2,2}$ имеем уравнения:

$$h_{2,1}+h_{2,2}=1;$$

$$60+30h_{2,1}=80+60h_{2,2},$$

откуда

$$h_{2,1}=\frac{8}{9}; \quad h_{2,2}=\frac{1}{9},$$

что и приводит к тому наивыгоднейшему распределению деталей по станкам, которое дано в табл. 2 раздела I (стр. 9).

Теперь мы хотим обратить внимание на один момент, связанный с приведенным процессом получения решения, который позволит наметить путь распространения этого способа решения с простейшего случая $m=2$ на случай любого m. Мы хотим обратить внимание на то, что полное нахождение решения совершенно эквивалентно нахождению отношения k_s, отвечающего тому s, для которого мы производим выбор. Действительно, если это отношение $k_s=\frac{\alpha_{s,2}}{\alpha_{s,1}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ (нам удобнее для дальнейшего обозначить его так) известно, то все решение находится сразу: для тех i, для которых $\frac{\alpha_{i,2}}{\alpha_{i,1}}<\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, или, что то же самое, $\lambda_1\alpha_{i,1}>\lambda_2\alpha_{i,2}$, нужно отдать предпочтение I детали, т. е. взять $h_{i,1}=1$; $h_{i,2}=0$; для тех, где $\lambda_2\alpha_{i,2}>\lambda_1\alpha_{i,1}$ — отдать предпочтение II детали, т. е. принять $h_{i,1}=0$; $h_{i,2}=1$; и, наконец, для тех i, когда $\lambda_1\alpha_{i,1}=\lambda_2\alpha_{i,2}$, соответствующее h подобрать из уравнения $\sum\alpha_{i,1}h_{i,1}=\sum\alpha_{i,2}h_{i,2}$. Это разрешающее отношение есть показатель равновесия, которое устанавливается в максимальном распределении между двумя деталями. В нашем частном примере это равновесие устанавливается на фрезерных станках и $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{2}{1}$. Следует сказать, что это разрешающее отношение определяется всей совокупностью условий вопроса, например, оно не может быть выражено только через k_1, k_2, ... Действительно, если бы в нашем частном примере был не один автомат, а два, тогда при максимальном распределении пришлось бы под I деталь отвести не только полностью револьверные и фрезерные станки, но частично и автомат.

Поэтому тогда разрешающее отношение стало бы $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{8}{3}$; наоборот, если бы втрое увеличилось число револьверных станков, то это отношение стало бы равно $3:2$.

Эту именно идею введения разрешающих отношений мы и используем для получения способа решения, пригодного для любого m. В этом случае естественно приходит мысль вместо разыскания многочисленных $h_{i,k}$ попытаться отыскать отношения $\lambda_1:\lambda_2:\ldots:\lambda_m$ (показатели равновесия при максимальном распределении), судя по которым так же, как в случае $m=2$, мы могли бы сразу указать те $h_{i,k}$, которые нужно взять равными нулю. Этот метод действительно удается осуществить. Его детальное изложение дано ниже. Перед тем как перейти к нему, установим одно вспомогательное обстоятельство.

2. Преобразование условия 3) задачи А

Нам важно для дальнейшего показать, что условию 3) задачи А можно придать другую формулировку, эквивалентную первоначальной.

Напомним формулировку задачи А.

Задача А. Числа $\alpha_{i,k}\geq 0$ $(i=1,2,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots,m)$ даны; найти $h_{i,k}$ из условий:

1) $h_{i,k}\geq 0$;

2) $\sum_{k=1}^{m} h_{i,k}=1 \quad (i=1,2,\ldots,n)$;

3) если ввести обозначение

$$z_k=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,k}h_{i,k},$$

то $z_1=z_2=\ldots=z_m$ и их общее значение z имеет максимальную возможную величину.

При составлении условий, которым должны удовлетворять числа $h_{i,k}$, мы могли бы рассуждать и несколько иначе, чем это было сделано выше (раздел I стр. 9—10), именно: так как число целых комплектов определяется числом деталей, которых имеется меньше всего, т. е. наименьшим из чисел z_k, то это число есть $z'=\min(z_1,z_2,\ldots,z_m)$. Это число z' и должно получить максимальное значение.

Таким образом приходим к задаче А'.

Задача А'. Условия 1) и 2) те же, что и в задаче А; а вместо условия 3):

3') Величина $z'=\min(z_1,z_2,\ldots,z_m)$ имеет максимальное возможное значение.

Покажем теперь эквивалентность задач А и А', точнее: установим следующее утверждение.

Теорема. Если через C обозначить максимальное значение z в задаче А, через C' — максимальное значение z' в задаче А', то

$C = C'$, и если при этом некоторая система чисел $\{h_{i,k}\}$ доставляет максимум в задаче А, то она же дает максимум в задаче А′; наоборот, если некоторая система чисел $\{h'_{ik}\}$ дает максимум в задаче А′, то из нее легко может быть получена система чисел $\{h_{i,k}\}$, дающая максимум в задаче А.

Доказательство. Пусть система чисел $\{h_{i,k}\}$ дает максимум в задаче А, т. е. для нее мы имеем $z_1 = z_2 = \ldots = z_m = z = C$. Для этой же системы мы имеем, очевидно:

$$z' = \min(z_1, z_2, \ldots, z_m) = \min(C, C, \ldots, C) = C.$$

Так как C — это значение, которое мы получили для z' при некотором выборе $h_{i,k}$, а C' есть $\max z'$ при всех возможных выборах, то

$$C \leqslant C'.$$

Для доказательства обратного неравенства рассмотрим сначала основной случай, когда все $\alpha_{i,k} > 0$. Пусть для некоторой системы $\{h'_{i,k}\}$ мы имеем $z' = \min(z_1, z_2, \ldots, z_m) = C'$. Мы утверждаем, что в таком случае непременно все $z_k = C'$. В самом деле, пусть, наоборот, одно из них $> C'$, например, $z_1 > C'$. В этом случае можно было бы все $h'_{i,1}$ незначительно уменьшить, за счет чего незначительно увеличить все прочие $h_{i,k}$; тогда попрежнему осталось бы $z_1 > C'$ и все $z_2, \ldots, z_m$ увеличились бы и стали также $> C'$. А потому оказалось бы, что для этой новой системы $z' = \min(z_1, z_2, \ldots, z_m) > C'$, а это противоречит тому, что C' есть максимальное возможное для z' значение. Итак, непременно $z_1 = z_2 = \ldots = z_m = C'$. Следовательно, $h'_{i,k}$ дает систему значений, для которой $z_1 = z_2 = \ldots = z_m$, и их общее значение z равно C'; так как C есть максимальное возможное значение для z, то непременно

$$C' \leqslant C.$$

Это неравенство вместе с прежним и дает $C' = C$.

Второе неравенство $C' \leqslant C$ установлено нами для случая, когда все $\alpha_{i,k} > 0$; если некоторые $\alpha_{i,k} = 0$, то это неравенство также справедливо, только доказательство его требует некоторых дополнительных соображений, которые мы здесь не будем приводить.

3. Основания метода разрешающих множителей

Мы покажем теперь, что решение задачи А, требующее разыскивания системы nm чисел $h_{i,k}$ может быть заменено задачей разыскания всего m чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — разрешающих множителей.

Разрешающими множителями для задачи А называется такая система m чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ($\lambda_k \geqslant 0$ и не все нули), что если для каждого данного i рассмотреть произведения

$$\lambda_1 \alpha_{i,1};\ \lambda_2 \alpha_{i,2};\ \ldots;\ \lambda_k \alpha_{i,k}$$

и обозначить через t_i величину наибольшего из них, то, принимая равными нулю те $h_{i,k}$, для которых соответствующее произ-

ведение не максимально $\lambda_k \alpha_{i,k} < t_i$, прочие $h_{i,k}$ возможно определить из условий:

$$1)\ h_{i,k} \geqslant 0;\quad 2)\ \sum_{k=1}^{m} h_{i,k} = 1;\quad 3)\ z_1 = z_2 = \ldots = z_m.$$

Покажем прежде всего, что нахождение разрешающих множителей дает действительно решение задачи А. Утверждаем, что если разрешающие множители $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ найдены и числа $h^*_{i,k}$ определены затем указанным выше образом, то получаемое с их помощью значение $z = z^*$ есть максимальное возможное значение.

В самом деле, для системы чисел $h^*_{i,k}$ имеем:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_k\right) z^* = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k z^*_k = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k} h^*_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (\lambda_k \alpha_{i,k}) h^*_{i,k} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} t_i h^*_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

(мы могли заменить всюду $\lambda_k \alpha_{i,k}$ на t_i, ибо для тех случаев, когда $\lambda_k \alpha_{i,k} < t_i$, по условию $h^*_{i,k} = 0$).

Пусть теперь $h_{i,k}$ — другая система чисел, для которой $z_1 = z_2 \ldots = z_m = z$. Тогда имеем:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k\right) z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k} h_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (\lambda_k \alpha_{i,k}) h_{i,k} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} t_i h_{i,k} = \sum_{i} t_i.$$

Сопоставляя это неравенство с предыдущим равенством, получаем:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k\right) z \leqslant \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k\right) z^*,$$

или

$$z \leqslant z^*.$$

Это и показывает, что значение z^* есть максимальное возможное для z значение, т. е. числа $h^*_{i,k}$, определенные с помощью разрешающих множителей, действительно дают решение задачи А.[1]

[1] Чтобы показать, какую роль играет введение разрешающих множителей, я несколько подробнее поясню, в чем состоит метод решения задачи А, вытекающий из общих правил анализа. В задаче А речь идет о разыскании максимума величины z, которая представляет линейную функцию от $h_{i,k}$, при некоторых дополнительных условиях. Известно, что для нахождения максимума линейной функции в промежутке достаточно сравнить ее значения на концах и выбрать большее из них. Это же правило сохраняется и при нахождении максимума линейной функции многих переменных в многограннике — достаточно

Итак, все дело сводится к разысканию разрешающих множителей. Покажем путь их нахождения. Заметим прежде всего, что если мы возьмем вместо разрешающих множителей некоторый случайный набор чисел $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0$, то мы все равно можем попытаться поступать так, как если бы они были искомые разрешающие множители, а именно: рассмотреть произведения $\lambda_1^0\alpha_{i,1}$; $\lambda_2^0\alpha_{i,2}$; ... ; $\lambda_m^0\alpha_{i,m}$, и для всех тех k, для которых соответственное произведение имеет немаксимальное значение, принять $h_{i,k}=0$. Нужно сказать, однако, что при таком случайном наборе обычно окажется, что среди произведений максимально одно, так что при данном i все $h_{i,k}$ нужно будет взять равными нулю, за исключением одного, которое придется принять равным 1.

Таким образом, при таком случайном выборе λ_k вполне определятся $h_{i,k}$, а вместе с ними получат определенное значение и z_k: $z_1^0, z_2^0, \ldots, z_m^0$. Конечно, эти значения будут неравны и, не меняя λ_k, сделать их равными не удастся. В каком же направлении изменять λ_k?

Мы знаем, что решение задачи будет достигнуто тогда (см. п. 2), когда $\min(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ получит максимальное возможное значение. Но этот минимум определяется наименьшим из чисел z_k. Пусть в полученной системе таким наименьшим из чисел $z_1^0, z_2^0, \ldots, z_m^0$ будет некоторое z_s^0. Нужно добиваться его увеличения, но ясно, что оно заменится на большее, если, не изменяя прочих λ_k, мы λ_s заменим на большее число. В самом деле, тогда в бóльшем числе случаев произведение $\lambda_s\alpha_{i,s}$ окажется максимальным в своем ряду, а потому $h_{i,s}$ будет принято равным единице, а тем самым z_s получит значение большее, чем z_s^0, и $\min(z_1, z_2, \ldots, z_m)$, вообще говоря, получит значение, превосходящее прежнее.

В этом, собственно, и состоит основной принцип в разыскании разрешающих множителей, а именно: за счет изменения λ_k подтягивать z_k и таким образом постепенно подвигаться к необходимому экстремуму. Возможны, конечно, и некоторые вариации: вместо подтягивания отстающих z_k можно, уменьшая соответственное λ_k, приближать к прочим слишком большие z_k. Однако, если эти операции производить случайным образом, без системы, то нет уверенности, что мы когда-либо их закончим: одни z_k

сравнить ее значения в вершинах его. Если это правило перевести на аналитический язык, то оно означает, что в данном случае следует выбирать системы из $(n+m-1)$ чисел $h_{i,k}$, прочие брать равными нулю, а выбранные $h_{i,k}$ определять из $(n+m-1)$ равенств $\sum_k h_{i,k}=1$; $z_1=z_2=\ldots=z_m$ и сравнивать получаемые значения z. При каждой пробе надо будет решить систему небольшого числа уравнений, но число проб, которые нужно будет произвести, есть $C_{nm}^{n+m-1}-nC_{(n-1)m}^{n+m-1}$, т. е. при $n=3$; $m=3$, — 108 проб, при $n=m=4$, — 8272 пробы; в задаче фанерного треста $n=8$; $m=5$ число проб — величина порядка миллиарда. Благодаря же наличию разрешающих множителей все ненужные системы отбрасываются и приходится решать только одну.

будут подтягиваться, зато другие могут снизиться, и приближения к результату мы не получим. Поэтому в данном процессе лучше следовать определенной системе вычислений, которую мы сейчас опишем. Для большей ясности изложение этой схемы проведем на примере.

4. Примерная схема вычислений

Рассмотрим решение задачи о наивыгоднейшем распределении работы экскаваторов (стр. 16, пример 3).

Для того чтобы указанные нам виды работы совершить в кратчайшее время, нужно указать распределение их, при котором будет обеспечена максимальная производительность в один час при условии, что все виды работ производятся поровну. Тогда данная задача приводит в точности к задаче А, где роль $\alpha_{i,k}$ и играют данные производительности экскаваторов (значения их даны в табл. 5 раздела III и воспроизведены ниже в табл. 2). Прежде всего в качестве начальных значений $\lambda_k : \lambda_k^0$ выгодно выбирать величины, обратно пропорциональные суммам $\sum_i \alpha_{i,k}$;

$$\lambda_k^0 = \frac{P}{\sum_i \alpha_{i,k}},$$ где в качестве P можно принять любое число.

В нашем примере примем $P=1000$ и тогда окажется:

$$\lambda_1^0 = \frac{1000}{276} = 3{,}62;\ \lambda_2^0 = \frac{1000}{160} = 6{,}25;\ \lambda_3^0 = \frac{1000}{192} = 5{,}218.$$

Домножим элементы $\alpha_{i,k}$ на λ_k^0, т. е. нам придется первую строку таблицы значений $\alpha_{i,k}$ домножить на $\lambda_1^0=3{,}62$, вторую на 6,25, третью на 5,81.

Таблица 2

Значения $\alpha_{i,k}$

k \ i	1	2	3
1	105	107	64
2	56	66	38
3	56	83	53

Полученные произведения $\lambda_k^0\alpha_{i,k}$ даны в табл. 4 (нулевое приближение — левая колонка). При каждом i (в каждом столбце) выбираем наибольшее значение — оно подчеркнуто.[1] Для этих значений и берем $h_{i,k}=1$, для прочих $h_{i,k}=0$. Произведения $\alpha_{i,k}h_{i,k}$ выписаны в той же табл. 4 справа. Суммируя их по каждой строке, получаем значения z_k для нулевого приближения: $z_1^0=105$; $z_2^0=0$; $z_3^0=136$.

Отстающим оказалось z_2, поэтому нужно λ_2 увеличить. Увеличивать λ_2 нужно настолько, чтобы обеспечить первое совпадение, а именно: рассматриваем элементы отстающей второй строки ($\lambda_k^0\alpha_{i,k}$ в табл. 4) и выбираем среди них тот, который

[1] Цифры, о которых мы говорим „подчеркнуто", напечатаны в табл. 4 (и ниже — в табл. 7 и 8) жирным шрифтом.

относительно наиболее близок к максимальному (подчеркнутому) элементу своего столбца — это 412 (близко к 432). Увеличением λ_2 и подтягиваем его до этого максимального. Для этого к λ_2 нужно внести „поправочный множитель" $\lambda_2' : \lambda_2^0 = 432 : 412 = 1{,}05$;[1] λ_1 и λ_3 оставлены без изменений, т. е. для них берем поправочным множителем единицу (λ_k и все поправочные множители к ним во всех приближениях даны в табл. 3). Домножаем вторую строку значений $\lambda^0_k \alpha_{i,k}$ на этот поправочный множитель 1,05, а первую и третью переписываем без изменений; тогда получаем значения $\lambda_k' \alpha_{i,k}$ для первого приближения. Опять подчеркиваем максимальные в каждой строке.

Таблица 3

Разрешающие множители

	Начальные значения	Поправочные множители		Окончательные значения
		I приближение	II приближение	
λ_1	3,62	1	0,98	3,45
λ_2	6,25	1,05	1	6,56
λ_3	5,21	1	1	5,21

Теперь все $h_{i,k}$ определены и равны 0 или 1, за исключением $h_{2,2}$ и $h_{2,3}$, отвечающих равным произведениям. Их постараемся определить так, чтобы z_2 и z_3 оказались равными. Обозначая $h_{2,2}$ через u и имея в виду, что сумма $h_{2,2} + h_{2,3} = 1$, имеем $h_{2,3} = 1 - u$, условие $z_2 = z_3$ дает нам:

$$66u = 83(1-u) + 53,$$

откуда

$$u = 0{,}915.$$

Следовательно, $h_{2,2} = 0{,}915$; $h_{2,3} = 0{,}085$.

Подставляя эти значения в табл. 4 для $\alpha_{i,k} h_{i,k}$, получаем для z_k в первом приближении значения $z_1 = 105$; $z_2 = z_3 = 60{,}1$. Как видим, последние два значения являются отстающими, и нужно λ_2 и λ_3 подтягивать; но так как имеют значение только отношения между λ_k, можно вместо этого спускать λ_1. Итак, вводим для λ_1 поправочный множитель < 1, именно такой, чтобы максимальный элемент первой строки 381 совпал с одним из элементов своего столбца. Очевидно, этот поправочный множитель должен быть $\lambda_1'' : \lambda_1' = 365 : 381 = 0{,}958$. Помножаем на этот множитель элементы первой строчки, переписывая вторую и третью без изменений; получаем $\lambda_k'' \alpha_{i,k}$ во втором приближении. Опять подчеркиваем максимальное в каждом столбце, таких оказывается в первом и втором столбце по два, и соответствующие $h_{i,k}$ не определены.

Обозначим $h_{1,1} = x$; $h_{2,2} = y$, тогда $h_{1,2} = 1 - x$; $h_{2,3} = 1 - y$. Постараемся подобрать x и y, чтобы добиться равенства $z_1 = z_2 = z_3$. Имеем следующие значения (табл. 4).

[1] Все величины, относящиеся к нулевому приближению, отмечаем значком ^{0} (наверху), относящиеся к первому приближению — значком $'$ и т. д.

Таблица 4

$\lambda_k \alpha_{i,k}$			$\alpha_{i,k} h_{i,k}$			z_k
Нулевое приближение						
381	388	231	105 × 1	107 × 0	64 × 0	105
349	412	237	56 × 0	66 × 0	38 × 0	0
292	**432**	**276**	56 × 0	83 × 1	53 × 1	136
Первое приближение						
381	388	231	105 × 1	107 × 0	64 × 0	105
365	**432**	249	56 × 0	66 × 0,915	38 × 0	60,2
292	**432**	**276**	56 × 0	83 × 0,085	53 × 1	60,2
Второе приближение						
365	372	222	105 × 0,67	107 × 0	64 × 0	70,8
365	**432**	249	56 × 0,33	66 × 0,785	38 × 0	70,8
292	**432**	**276**	56 × 0	83 × 0,215	53 × 1	70,8

$$z_1 = 105x;\quad z_2 = 56(1-x) + 66y \quad \text{и} \quad z_3 = 83(1-y) + 53.$$

Следовательно, получаем уравнения:

$$105x = 56(1-x) + 66y = 83(1-y) + 53 = z.$$

Отсюда:

$$x = \frac{1}{105} z;\quad y = \frac{136}{83} - \frac{1}{83} z.$$

Подставляя эти выражения в среднее уравнение, получаем для z уравнение:

$$164{,}2 - 0{,}532z - 0{,}795z = z,$$

откуда: $z = 70{,}8$ и далее $x = 0{,}67$; $y = 0{,}785$.

Найденные значения x и y и дают нам значения $h_{i,k}$ для второго приближения, одновременно являющегося решением задачи.

Найденное значение $z = 70{,}8$ показывает максимальную величину выработки в час по всем трем видам работ при условии равенства этих выработок.

Так как нужно произвести 20 000 м³ работ каждого вида, то минимальное необходимое время 20 000 : 70,8 = 282 часа. Умножая найденные значения $h_{i,k}$ на 282, получаем время, которое нужно занять каждый механизм по каждому виду работы и которое было приведено выше (раздел III, табл. 5).

На этом примере мы показали основной порядок нахождения решения. Теперь сделаем некоторые замечания по поводу осуществления этой схемы.

5. Дополнительные указания к схеме

Прежде всего отметим следующее. Проведение схемы в приведенном выше примере было особенно просто; ее осуществление в других случаях может привести в дополнительной трудности, которую мы сейчас и рассмотрим. Переходя от нулевого приближения к первому, мы подтягивали значение z_2 к z_3. При этом нам удалось, определив подходящим образом $h_{2,2}$ и $h_{2,3}$, добиться равенства $z_2 = z_3$. Однако, так будет не всегда. Для определения u мы имели уравнение, из которого нашли $u = 0{,}915$. Но вообще это уравнение будет иметь вид:

$$a + bu = c(1-u) + d,$$

и его решение не обязательно будет заключено в пределах между 0 и 1, а последнее условие $0 \leqslant u \leqslant 1$ совершенно необходимо для нас. Заметим прежде всего, что во всяком случае имеем $a < c + d$ (это неравенство равносильно тому, что $z_2^0 < z_3^0$, так как обе части рассматриваемого уравнения при $u = 0$ обращаются в z_2^0 и z_3^0). Если теперь мы имеем $a + b > d$, то решение уравнения и удовлетворяет неравенству $0 \leqslant u \leqslant 1$; если же $a + b < d$, то решение окажется > 1. В таком случае следует принять $u = 1$, так как тогда, хоть мы и не добьемся равенства $z_2 = z_3$, но максимально приблизим z_2 к z_3.

Исследование этого случая можно произвести и иначе, а именно: так как мы заинтересованы в максимальном повышении $\min(z_2, z_3)$, то должны подыскать наибольшее число t, при котором для некоторого u $(0 \leqslant u \leqslant 1)$ возможно удовлетворить обоим неравенствам

$$a + bu \geqslant t; \quad c(1-u) + d \geqslant t.$$

Так как благодаря первому неравенству, имеем:

$$u \geqslant \frac{t-a}{b},$$

кроме того $u \geqslant 0$, то второе неравенство дает нам:

$$t \leqslant d + c(1-u) \begin{cases} \leqslant c + d \\ \leqslant c\left(1 - \dfrac{t-a}{b}\right) + d \end{cases}$$

Решая эти два неравенства относительно t и выбирая меньшую из полученных границ, и получаем максимальное t, при котором первоначальные неравенства разрешимы.

Последний путь рассуждения пригоден и в других случаях, когда у нас получаются скрещения не двух, а нескольких z_k.

Так, в случае, когда мы два равных значения z_k подтягиваем к третьему, то (см. пример на стр. 40) уравнения, подлежащие решению, принимают вид:

$$a + bx = c + dy = e(1-x) + f(1-y) + g.$$

Решения x и y опять могут оказаться вне пределов 0 и 1. Так как мы заинтересованы больше всего в получении максимального $\min(z_1, z_2, z_3)$, то нужно опять найти максимальное t, при котором возможно удовлетворить всем неравенствам.

$$a + bx \geqslant t; \quad c + dy \geqslant t; \quad e(1-x) + f(1-y) + g \geqslant t.$$

Отсюда имеем:

$$x \geqslant \frac{t-a}{b}; \quad y \geqslant \frac{t-a}{c}$$

и кроме того $x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$. Тогда третье неравенство дает нам:

$$t \leqslant \begin{cases} e\left(1 - \dfrac{t-a}{b}\right) + f\left(1 - \dfrac{t-c}{d}\right) + g \\ e + f\left(1 - \dfrac{t-c}{d}\right) + g \\ e\left(1 - \dfrac{t-a}{b}\right) + f + g \\ e + f + g \end{cases}$$

в зависимости от того, какой парой неравенств для x и y воспользоваться. Решая эти неравенства относительно t и выбирая наименьшую из получающихся оценок, мы и получаем искомое значение t — максимальное, для которого могут быть удовлетворены все три первоначальных неравенства. После того как t определено, x и y по нему находятся легко и вычисление данного приближения заканчивается. Для перехода к следующему приближению опять среди z_k находим одно или несколько наименьших и соответственные λ_k увеличиваем.

Отметим, что среди неравенств, определяющих t, фактически приходится использовать первое, т. е. оно дает наименьшую оценку для t в том случае, когда возможно удовлетворить уравнениям $z_1 = z_2 = z_3$. Укажем еще, что рассуждения, которые мы привели здесь для случая двойного и тройного совпадения, с небольшими видоизменениями применимы и в более сложных случаях.

Изложение предыдущего п. 4 вместе с сделанным сейчас дополнительными пояснениями дает вполне определенную „железную“ схему решения. Нужно все время из чисел z_k находить наименьшее (или несколько равных между собой наименьших), и его определенным, описанным выше образом подтягивать. Необходимо сказать, что буквальное следование этой схеме может быть рекомендовано для простых случаев (когда n мало), а также для сложных случаев (n велико), перед концом решения, когда мы уже достаточно приблизились к нему (z_k мало разнятся). В начале же вычисления целесообразно отходить от этой схемы, например, подтягивать не одно наименьшее, а одновременно несколько малых z_k, спускать (уменьшая λ_k) слишком крупные z_k, в процессе решения не добиваться скрупулезно равенства между наименьшими z_k (не решать промежуточных систем). Все эти упрощения, которые могут часто сократить время вычисления, не влияют на существо решения, так как важно найти λ_k, а путь их нахождения роли не играет.

В связи с этим полезно указать, что все промежуточные выкладки, связанные с определением λ_k, можно производить весьма неточно с 2—3 знаками (на логарифмической линейке); на результат это не повлияет. Если результат желательно получить точный, то с соответствующей точностью нужно произвести только последнее вычисление — решение системы, из которой определяются окончательные значения $h_{i,k}$. Нужно сказать только, что если мы вычисления производим, например, с относительной погрешностью 0,01, то два произведения $\lambda_k\alpha_{i,k}$, отличающиеся меньше чем на 0,01 их величины, мы должны рассматривать как одинаковые.

Наконец, остановимся здесь еще на следующем обстоятельстве. Трудность решения задачи существенно зависит от значений n и m, при этом решение в особенности усложняется с увеличением m, например, как мы видели, для случая $m=2$ решение чрезвычайно просто при любом n. Поэтому нужно стараться n и m уменьшить. Прежде всего, если два ряда в таблице $\alpha_{i,k}$ пропорциональны, например, $\alpha_{i,2}=k\alpha_{i,1}$ для любого i, то можно ввести новые $\alpha_i'=\alpha_{i,1}(1+k)$ и ими заменить $\alpha_{i,1}$ и $\alpha_{i,2}$, т. е. n уменьшить на единицу. Иначе говоря, это означает, например, что вместо двух станков, выработки которых пропорциональны, мы вводим условный новый станок, производительность которого равна их суммарной производительности. Далее, если у нас $m>n$, то выгодно изменить их роли, т. е. вместо $\alpha_{i,k}$ ввести $\alpha^*_{i,k}=\alpha_{k,i}$, но при этом придется искать уже не $\max z$, а минимум, т. е. искать $h_{i,k}$, чтобы оказалось $z_1=z_2=\ldots=z_n$, и чтобы их значение оказалось наименьшим. На конкретном языке эта замена означает, что вместо того, чтобы рассматривать задачу получения максимальной продукции в день, мы рассматриваем задачу получения заданной продукции в минимальное время; очевидно, что обе задачи равносильны.

6. О контроле решения

Во многих математических задачах для проверки правильности полученного решения нет надобности проверять весь ход его; о ней можно судить прямо по результату. Например, для проверки правильности решения уравнения достаточно полученное решение подставить в него. Для проверки правильности решения задачи А также достаточно привести только окончательные значения λ_k и произведений $\lambda_k\alpha_{i,k}$ и $\alpha_{i,k}h_{i,k}$ для последнего приближения и убедиться в том, что $h_{i,k}>0$ отвечают подчеркнутым — максимальным $\lambda_k\alpha_{i,k}$ и что z_k получают равные значения. Если это действительно так, то решение найдено правильно. Наличие такого контроля полезно тем, что нахождение решения инженер или экономист могут передавать специальному

расчетчику, проверить же полученное решение, как ясно из сказанного, можно за 10—15 минут без каких бы то ни было затруднений.

7. О приближенном решении задачи А

Решение задачи А, когда n и m не малы, оказывается все же довольно кропотливым и длительным. Поэтому желательно было бы указать методы более простые, которые позволили бы найти не точное решение задачи, но весьма близкое к нему по эффективности. Здесь мы имеем ввиду только указать некоторые пути, на основе которых подобные методы могли бы быть разработаны.

Прежде всего заметим, что так как решение соответствует тому случаю, когда $h_{i,k}>0$ лишь для пар (i, k), отвечающих максимальным произведениям $\lambda_k\alpha_{i,k}$, то приближенное решение мы получим, если будем допускать $h_{i,k}$, отличные от нуля для тех (i, k), для которых произведение $\lambda_k\alpha_{i,k}$ близко к максимальному. Поэтому первый путь для построения приближенного решения таков. В таблицах произведений $\lambda_k^0\alpha_{i,k}$ в каждом столбце (за исключением одного), наряду с максимальным $\lambda_k\alpha_{i,k}$, подчеркиваем ближайшее к нему (не следует подчеркивать это ближайшее для того случая, когда оно наибольше, относительно, отличается от своего максимального). После этого нужно попытаться определить $h_{i,k}$ для отмеченных (i, k) из условий $\sum_k h_{i,k}=1$ и равенства $z_1=z_2=\ldots=z_m$. Рекомендуем читателю проверить, что применение этого способа в примере п. 4 сразу привело бы к окончательному решению.

Другой путь основан на ином соображении.

Мы указывали уже в предыдущем п. 6, что если два столбца пропорциональны, то их можно объединить в один. Для получения приближенного решения это объединение можно совершить и тогда, когда пропорциональность имеет место лишь приблизительно. Таким образом, объединяя в группы приблизительно однородные элементы, можно существенно уменьшить n и m, и тем самым заметно упростить задачу. Решение этой упрощенной задачи, конечно, для первоначальной будет лишь приближенным.

8. Применение метода к решению задачи В

В задаче В по сравнению с задачей А прибавляется дополнительное условие, что для найденного решения должно выполняться неравенство

$$\sum_{i,k} c_{i,k}h_{i,k}\leqslant C,$$

где $c_{i,k}\geqslant 0$ и C — заданные числа.

Метод разрешающих множителей применим и к этой задаче. Не входя уже в такие подробности, как в задаче А, укажем основное отличие в применении метода в данном случае.

Здесь нужно ввести кроме λ_k, отвечающих z_k, еще один разрешающий множитель μ, отвечающий величине $R=\sum\limits_{i,k} c_{i,k}h_{i,k}$.

В данном случае числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ и μ будем называть разрешающими множителями при условии, что, если для каждого i обозначить через t_i наибольшую из величин

$$\lambda_1\alpha_{i,1}-\mu c_{i,1};\ \lambda_2\alpha_{i,2}-\mu c_{i,2};\ \dots;\ \lambda_m\alpha_{i,m}-\mu c_{i\ m},$$

то, полагая $h_{i,k}=0$, если $\lambda_k\alpha_{i,k}-\mu c_{i,k}<t_i$, возможно прочие $h_{i,k}$ определить из условий:

$$1)\ h_{i,k}\geqslant 0;\quad 2)\ \sum_{k=1}^{m} h_{i,k}=1;\quad 3)\ z_1=z_2=\dots=z_m;$$

$$4)\ R=\sum_{i,k} c_{i,k}h_{i,k}=C.^{1}$$

Опять утверждаем, что если разрешающие множители найдены и $h^*_{i,k}$ определены по ним указанным выше образом, то они и дают решение задачи. В самом деле, для так определенных $h_{i,k}=h^*_{i,k}$ имеем:

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\right)z^*-\mu C=\sum_k\lambda_k\sum_i\alpha_{i,k}h^*_{i,k}-\mu\sum_{i,k}c_{i,k}h^*_{i,k}=$$

$$=\sum_i\sum_k(\lambda_k\alpha_{i,k}-\mu c_{i,k})h^*_{i,k}=\sum_i t_i.$$

Если же теперь $h_{i,k}$ — числа, любым другим образом выбранные, при которых выполнены вышенаписанные условия 1), 2), 3) и $R\leqslant C$, то имеем:

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\right)z-\mu C\leqslant\sum_k\lambda_k\sum_i\alpha_{i,k}h_{i,k}-\mu\sum_{i,k}c_{i,k}h_{i,k}=$$

$$=\sum_i\sum_k(\lambda_k\alpha_{i,k}-\mu c_{i,k})h_{i,k}\leqslant\sum_i\sum_k t_i h_{i,k}=\sum_i t_i.$$

Сопоставление этого неравенства с предыдущим равенством и дает нам, что $z\leqslant z^*$, т. е. при $h_{i,k}=h^*_{i,k}$ действительно достигается решение задачи.

[1] В случае $\mu=0$ достаточно, чтобы оказалось $R\leqslant C$.

Таким образом, опять все дело сводится к разысканию разрешающих множителей.[1] Методы их нахождения, примерно, те же, что и в случае задачи А. Не входя здесь в подробности, проиллюстрируем эти способы и необходимые дополнительные соображения решением следующего примера.

Таблица 5

Значения $c_{i,k}$

k \ i	1	2	3
1	12	21	15
2	12	20	11
3	12	17	14

Пример. Пусть таблица $\alpha_{i,k}$ будет та же, что и в примере п. 4 (табл. 2). Значения $c_{i,k}$ зададим, как указано в табл. 5; пусть $C=43$. Воспользоваться решением, полученным раньше, нельзя, так как для найденных там значений $h_{i,k}$ оказывается: $R=12\cdot 0{,}67+12\cdot 0{,}33+20\cdot 0{,}785+17\cdot 0{,}215+141\cdot 1=45{,}4>43$.

В качестве нулевых начальных значений λ_k^0 берем те же, что и раньше; в качестве начального значения для μ можно принять, например:

$$\mu^0=\frac{1000}{\sum\limits_{i,k}c_{i,k}}=\frac{1000}{134}=7{,}45.$$

Таблица 6

	Начальные значения	Поправочные множители: I приближение	Поправочные множители: II приближение	Поправочные множители: III приближение	Окончательные значения
λ_1	3,62	1	0,973	1	3,53
λ_2	6,25	1,063	1	1	6,65
λ_3	5,21	1	1	0,976	5,07
μ	7,45	1	1	0,751	5,59

Вычисляем для данных λ_k^0 и μ^0 величины $\lambda_k\alpha_{i,k}-\mu c_{i,k}$ (см. табл. 7) и в каждом столбце подчеркиваем наибольшее из полученных чисел; $h_{i,k}$, соответствующие этим наибольшим, берем равными 1, прочие — равными 0. Как видим, отстающим является z_2. R случайно оказалось равным $C=43$.

Теперь мы должны подтягивать z_2.

[1] В данном случае, в отличие от задачи А, не всегда можно гарантировать существование разрешающих множителей. Причина этого в том, что задача В не всегда разрешима. Если речь идет об условиях 1), 2), 3) и 4), то для ее разрешимости нужно, чтобы $\sum\limits_i c_{i,k_i}\leqslant C$, где c_{i,k_i} — наименьшее из чисел $c_{i,1}, \dots, c_{i,m}$. Заметим, что задача В будет разрешима всегда, если условие 2) заменить на условие $\sum\limits_k h_{i,k}\leqslant 1$.

Таблица 7

Ход решения задачи В

$\lambda_k a_{i,k} - \mu c_{i,k}$			$a_{i,k} h_{i,k}$ и $c_{i,k} h_{i,k}$			z_k	R
Нулевое приближение							
381—90	388—156	231—111	105 / 12 × 1	107 / 21 × 0	64 / 15 × 0	105	
349—90	412—149	237—82	56 / 12 × 0	66 / 20 × 0	38 / 11 × 0	0	43
292—90	**432—127**	**276—105**	56 / 12 × 0	83 / 17 × 1	53 / 14 × 1	136	
Первое приближение							
381—90	388—156	231—111	105 / 12 × 1	107 / 21 × 0	64 / 15 × 0	105	
371—90	438—149	**252—82**	56 / 12 × 0	66 / 20 × 0	38 / 11 × 1	38	40
292—90	**432—127**	**276—105**	56 / 12 × 0	83 / 17 × 1	53 / 14 × 0	83	
Второе приближение							
371—90	378—156	225—111	105 / 12 × 0,58	107 / 21 × 0	64 / 15 × 0	61	
371—90	438—149	252—82	56 / 12 × 0,42	66 / 20 × 0	38 / 11 × 1	61	40
292—90	**432—127**	**276—105**	56 / 12 × 0	63 / 17 × 1	53 / 14 × 0	83	
Третье приближение							
371—69	378—117	225—85	105 / 12 × 0,662	107 / 21 × 0	64 / 15 × 0	69,6	
371—69	**438—112**	**252—61**	56 / 12 × 0,338	66 / 20 × 0,490	38 / 11 × 0,490	69,6	43
285—69	**421—95**	**269—79**	56 / 12 × 0	83 / 17 × 0,510	53 / 14 × 0,510	69,6	

Ближайшим к своему максимальному оказывается $237-82$. Увеличиваем λ_2, снабжая множителем ε_2, значение которого (для того, чтобы получить совпадение), нужно определить из уравнения

$$237\varepsilon_2 - 82 = 276 - 105,$$

откуда $\varepsilon_2 = 253 : 237 = 1{,}063$. Домножаем на него первые элементы второй строки, подчеркиваем максимальные элементы. Подлежат определению $h_{3,2} = u$ и $h_{3,3} = 1 - u$. Так как равенству $z_2 = 38u = 53(1-u) + 83 = z_3$ удовлетворить нельзя для $0 \leqslant u \leqslant 1$, нужно z_2 и z_3 максимально возможно сблизить. Для этого следует, очевидно, принять $u = 1$. Итак, найдено первое приближение. Здесь оказалось $R = 40$. Для перехода к следующему приближению нужно подтягивать z_2 или вместо этого опускать z_1. Опять для нахождения множителя ε_1 для λ_1 составляем уравнение $381\varepsilon_1 - 90 = 371 - 90$, откуда $\varepsilon_1 = 0{,}973$. Это дает переход ко второму приближению (небольшие вычисления, связанные с ним, мы не приводим). Теперь нужно опускать z_3. Таким образом, мы должны снабдить λ_3 дополнительным множителем ε_3. С другой стороны, R у нас недостаточно велико ($R < C$), нам нужно увеличить R; для этого μ нужно уменьшить; снабдим его множителем γ. Наличие двух множителей ε_3 и γ позволит нам добиться еще двух совпадений. Но в задаче В нам и необходимо иметь на одно совпадение больше, ибо для определения остающихся $h_{i,k}$ прибавляется дополнительное равенство $R = C$. Итак, для определения ε_3 и γ вводим уравнение, соответственно требованию двух совпадений:

$$438 - 149\gamma = 432\varepsilon_3 - 127\gamma,$$
$$252 - 82\gamma = 276\varepsilon_3 - 105\gamma,$$

откуда $\varepsilon_3 = 0{,}976$; $\gamma = 0{,}751$. После введения этих поправочных множителей переходим к третьему приближению. Теперь мы имеем в каждом столбце по совпадению. Вводим неизвестные x, y, v:

$$h_{1,1} = x;\ h_{1,2} = 1 - x;\ h_{2,2} = y;\ h_{2,3} = 1 - y;\ h_{3,2} = v;\ h_{3,3} = 1 - v.$$

Уравнения $z_1 = z_2 = z_3 = t$ и $R = C$ запишутся тогда так:

$$105x = 56(1-x) + 66y + 38v = 83(1-y) + 53(1-v) = t$$
$$12x + 12(1-x) + 20y + 17(1-y) + 11v + 14(1-v) = 43.$$

Последнее уравнение после упрощений дает $y = v$, а первые принимают вид:

$$105x = 56(1-x) + 104y = 136(1-y) = t,$$

откуда

$$t = 69{,}6;\ x = 0{,}662;\ y = v = 0{,}49.$$

На этом вычисление третьего приближения, совпадающего с окончательным решением задачи, заканчивается. Заметим, что полученная максимальная выработка при дополнительном условии оказалась равной 69,6, т. е. несколько меньше, чем прежде найденное без дополнительных условий 70,8.

9. Применение метода к решению задачи С

Отличие задачи С от задачи А состоит в том, что z_k определяются более сложным образом, именно:

$$z_k = \sum_{i,l} \gamma_{i,k,l} h_{i,l}$$

и опять $h_{i,l}$ должны быть определены из условий:

$$h_{i,l} \geqslant 0; \ \sum_l h_{i,l} = 1; \ z_1 = z_2 = \ldots = z_m \text{ максимально.}$$

Здесь, как и в задаче А, существуют разрешающие множители. В данном случае так называются числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, удовлетворяющие условию, что если для каждого данного i обозначить через t_i наибольшее из чисел

$$\sum_k \lambda_k \gamma_{i,k,1}; \ \sum_k \lambda_k \gamma_{i,k,2}; \ldots$$

и принять $h_{i,l} = 0$, когда соответствующая сумма не максимальна $\sum_k \lambda_k \gamma_{i,k,l} < t_i$, то прочие $h_{i,l}$ могут быть определены из условий

$$h_{i,l} \geqslant 0; \ \sum_l h_{i,l} = 1; \ z_1 = z_2 = \ldots z_m$$

Точно так же, как в двух предыдущих случаях, доказывается, что если разрешающие множители найдены и $h_{i,l}$ по ним определены, как указано выше, то мы имеем решение. Таким образом и при решении этой задачи дело сводится к разысканию разрешающих множителей, которое может проводиться теми же методами.

Пример. Решим в качестве примера вторую из задач о разрезании арматуры (пример 6, стр. 21). Нам нужно из 100 стержней по 7,4 и 50 по 6,4 изготовить наибольшее число комплектов 1,5 + 2,1 + 2,9. Возможные способы разрезания были указаны выше (см. стр. 20). Каждой части сопоставляем свой разрешающий множитель; обозначим их: u — соответствует части 1,5; v — 2,1; w — 2,9. Каждому значению l соответствует свой способ разрезания по порядку, например $i=1$; $l=3$ соответствует способ III разрезания стержня в 7,4 (табл. 7, стр. 20), именно: 1,5 + 1,5 + + 2,1 + 2,1. В данном случае $\sum_k \lambda \ \gamma_{i,k,l}$ будет, очевидно, $2u + 2v$. Напомним, что $\gamma_{i,k,l}$ — число k-ых частей, которое получается при разрезании стержня i-го вида на части l-ым способом, так

что в данном случае $\gamma_{1,1,3} = 2$; $\gamma_{1,2,3} = 2$. В 1 столбце табл. 8 эти суммы, отвечающие различным способам разрезания, выписаны в общем виде. В качестве начальных значений u, v, w принимаем длины стержней $u^0 = 1{,}5$; $v^0 = 2{,}1$; $w^0 = 2{,}9$.[1]

Вычисляем суммы $\sum_k \lambda_k \gamma_{i,k,l}$ для этих данных и подчеркиваем самое крупное из полученных значений сумм (отдельно для случая $i=1$ и $i=2$). Естественно, максимальными оказались в обоих случаях суммы, отвечающие первому способу. Выбираем соответственные $h_{i,k,l} = 1$ и берем прочие равными нулю. Иначе говоря, все стержни разрезаем по первому способу — это дает нам $z_1 = 300$; $z_2 = 150$; $z_3 = 100$.

Отстает z_3; подтягиваем его. Для этого увеличиваем w, чтобы обеспечить первое совпадение. Такое w определится из равенства $4{,}5 + w = 1{,}5 + 2w$, откуда $w = 3$.

Теперь вычисляем второе приближение. Так как мы имеем теперь совпадение, то $h_{1,1} = x$ должны определить из равенства $z_1 = z_2$, т. е.

$$3x + 1 \cdot (1 - x) = x + 2 \cdot (1 - x),$$

откуда $x = h_{1,1} = \frac{1}{3}$; $h_{1,2} = \frac{2}{3}$, что дает нам:

$$z_1 = \frac{100}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 100 = 166{,}6; \qquad z_3 = \frac{100}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} 100 \cdot 2 = 166{,}6;$$

$$z_2 = 50 \cdot 3 = 150.$$

Нужно подтягивать z_2. Легко сообразить, что для получения нового совпадения необходимо принять $v = 2{,}25$. Так переходим к третьему приближению. Здесь получилось четверное совпадение. Вводя неизвестные $x = 100h_{1,1}$; $y = 100h_{1,2}$; $z = 100h_{1,3}$; $t = 100h_{1,4}$ (числа стержней по 7,4, разрезанных по каждому способу), получаем для их определения такие уравнения:

$$3x + y + 2z = 2z + 2t + 150 = x + 2y + t;$$
$$x + y + z + t = 100.$$

Эта система неопределенна, так как неизвестных больше, чем уравнений, но произвольно выбрать одно из неизвестных нельзя, так как нарушится положительность остальных. Во всяком случае, можно принять $z = 0$, тогда получим $t = \frac{50}{9} \simeq 5$ (так как значения необходимо целые) $x = 33$; $y = 61$. Остается еще один стержень; для него принимаем VI способ разрезания. Тем самым $h_{i,l}$ для третьего приближения определены и решение найдено.

[1] Вообще в задачах, связанных с уменьшением отходов, в качестве первых приближений следует брать длины (площади для двумерного случая) соответствующих частей.

Таблица 8

Ход решения задачи C

Стержни	Способы разрезания $\Sigma\lambda_k\gamma_{i,k,l}$	Нулевое приближение $u=1{,}5;\ v=2{,}1;\ w=2{,}9$		I приближение $u=1{,}5;\ v=2{,}1;\ w=3{,}0$		II приближение $u=1{,}5;\ v=2{,}25;\ w=3{,}0$	
		$\Sigma\lambda_k\gamma_{i,k,l}$	$h_{i,l}$	$\Sigma\lambda_k\gamma_{i,k,l}$	$h_{i,l}$	$\Sigma\lambda_k\gamma_{i,k,l}$	$h_{i,l}$
7,4 ($i=1$)	$l=1$; I $3u+w$	**7,4**	1	**7,5**	0,333	**7,5**	0,33
	$l=2$; II $u+2w$	7,3	0	**7,5**	0,661	**7,5**	0,61
	$l=3$; III $2u+2v$	7,2	0	7,2	0	**7,5**	0
	$l=4$; IV $2v+w$	7,1	0	7,2	0	**7,5**	0,05
	$l=5$; V $3u+v$	6,6	0	6,6	0	6,75	0
	$l=6$; VI $u+v+w$	6,5	0	6,6	0	6,75	0,01
6,4 ($i=2$)	$l=1$; I $3v$	**6,3**	1	**6,3**	1	**6,75**	1
	$l=2$; II $4u$	6,0	0	6,0	0	6,0	0
	$l=3$; III $2u+w$	5,9	0	6,0	0	6,0	0
	$l=4$; IV $2w$	5,8	0	6,0	0	6,0	0
Число частей	z_1 (по 1,5)	300		166,6		161	
	z_2 (по 2,1)	150		150		161	
	z_3 (по 2,9)	100		166,6		161	

10. Непосредственное применение разрешающих множителей

До сих пор мы рассматривали разрешающие множители лишь как техническое средство для решения задач A, B и C; только через это они получали применения. Таким образом, могло показаться, что метод решения задач A, B и C, основанный на разрешающих множителях, не имеет особых преимуществ, кроме, может быть, простоты или краткости его, по сравнению с другими возможными методами. Между тем это не так; разрешающие множители имеют гораздо большее значение — они дают не только само решение задачи, но и позволяют указать ряд важных для применений характеристик найденного решения. Таким образом, решение, проведенное методом разрешающих множителей, дает гораздо больше, чем голый результат — численные значения $h_{i,k}$. Вот на эти применения самого метода решения мы и хотим здесь обратить внимание.

Величины λ_k и t_i, определенные выше в процессе решения, могут быть использованы в целом ряде вопросов, связанных с применением максимального решения. Для определенности я все время буду говорить о первой интерпретации задачи A — производстве комплектов деталей. В этом случае множители λ_k являются показателями эквивалентности для разных деталей при максимальном распределении. Таким образом, производство λ_s k-ых деталей эквивалентно производству λ_k s-ых деталей. Производство 100 штук k-ых деталей эквивалентно производству $100\frac{\lambda_k}{\Sigma\lambda_k}$ единиц изделий. Благодаря этому, например, если ставится задача производства не $z=z_1=z_2=\ldots z_m$ штук комплектов, что

возможно в течение дня, а $(z+\Delta z_1)$ штук первых деталей, $(z+\Delta z_2)$ вторых и т. д. (Δz_n не слишком велики), то может быть указано время, которое эта задача требует для своего выполнения, а именно

$$1+\frac{\sum\limits_k \lambda_k \Delta z_k}{z\sum\limits_k \lambda_k} \text{ дней.}$$

При этом решение этой задачи возможно, вообще говоря, если Δz_k невелики, с теми же отличными от нуля $h_{i,k}$, что и в первоначальной задаче.

Таким образом, с помощью знания λ_k решается вопрос об изменениях, связанных с небольшими вариациями в программе. Далее, с их помощью решается вопрос о целесообразности кооперирования. Если, например, для одной группы станков при максимальном распределении отношение для k-ой и s-ой деталей есть $\frac{\lambda_k}{\lambda_s}$, а для другой группы станков это отношение $\frac{\lambda'_k}{\lambda'_s}$ и, например, $\frac{\lambda'_k}{\lambda'_s}>\frac{\lambda_k}{\lambda_s}$, то представляется целесообразным произвести кооперирование — часть производства k-ой детали передать с первой группы станков на вторую и, наоборот, часть производства s-ой детали с второй группы на первую. Это даст рост суммарной производительности. Аналогичным образом величины t_i являются показателями эквивалентности производительности станков в условиях максимального распределения. Именно здесь оказывается, например, что дневная производительность i-го станка в переводе на целые комплекты равна $\frac{t_i}{\Sigma t_i}z$, где z — число комплектов, вырабатываемых на всех станках. Этот факт также может быть разнообразно использован при вариациях в распределении работы станков, например, при оценке потерь, происходящих при данном отступлении от наивыгоднейшего варианта. Аналогичные соображения об использовании разрешающих множителей могут быть сделаны и по отношению к задачам B и C.

Наконец, упомяну здесь же, что метод разрешающих множителей можно пытаться применять и в задачах, весьма мало похожих на задачи A, B и C. Я полагаю, что, в частности, возможно их использование в различных вопросах, относящихся к составлению производственных графиков. Так, мое внимание обратили на актуальность, например, такой задачи. В годовой программе машиностроительного завода имеется ряд серий машин. По каждой серии загрузка разных групп оборудования (токарных станков, фрезерных и т. д.) различна. В среднем, в течение года эта загрузка отвечает мощности оборудования. Как избежать в графике пик — перегрузки в отдельные моменты некоторых видов оборудования? Для этого, очевидно, нужно распределить отдельные задания на полугодия, затем на кварталы и месяцы, с сохранением, примерно, среднегодового соотношения на каждый период. Для нахождения такого распределения можно, по нашему мнению, также использовать разрешающие множители. Именно, нужно ввести множители, отвечающие каждому виду работ (токарных, фрезерных и т. д.), и с помощью их варьирования добиваться равномерного распределения.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ А ДЛЯ СЛОЖНОГО СЛУЧАЯ

(Задача Фанерного треста)

Настоящее приложение представляет расчет наивыгоднейшего распределения работы лущильных станков, произведенный по данным лаборатории Всесоюзного фанерного треста (см. пример 2, стр. 14). Расчет по методу разрешающих множителей выполнен А. И. Юдиным.

1. Условия задачи

Таблица I

№ станков	Номенклатуры материала				
	1	2	3	4	5
1	4,0	7,0	8,5	13,0	16,5
2	4,5	7,8	9,7	13,7	17,5
3	5,0	8,0	10,0	14,8	18,0
4	4,0	7,0	9,0	13,5	17,0
5	3,5	6,5	8,5	12,7	16,0
6	3,0	6,0	8,0	13,5	15,0
7	4,0	7,0	9,0	14,0	17,0
8	5,0	8,0	10,0	14,8	18,0

В табл. I помещены данные о производительности 8 лущильных станков по пяти различным номенклатурам материала, предложенные Центральной лабораторией Всесоюзного фанерного треста. Кроме того, требуется, чтобы количество материала данной номенклатуры в отношении к количеству всего материала составляло (табл. II):

Таблица II

1	2	3	4	5
10%	12%	28%	36%	14%

2. Преобразование условий задачи

Согласно указанному в разделе II правилу сведения задачи о выработке продукции данного ассортимента к задаче А, чтобы получить из значений табл. I значения $\alpha_{i,k}$, нужно все числа первого столбца поделить на 10, второго на 12 и т. д. (см. табл. II). Чтобы упростить вычисления, помножим предварительно все числа на 1260. Очевидно, что полученные числа также можно рассматривать как $a_{i,k}$. Для того чтобы произвести указанные действия, нужно числа 1-го столбца умножить на 126, 2-го на 105, 3-го на 45, 4-го на 35, 5-го на 90.

Полученные после умножения числа $a_{i,k}$ выписаны в табл. III.

Таблица III

№ станков	Номенклатура				
	1	2	3	4	5
1	504,0	735,0	382,5	455,0	1485,0
2	567,0	819,0	436,5	479,5	1575,0
3	630,0	840,0	450,0	518,0	1620,0
4	504,0	735,0	405,0	472,5	1530,0
5	441,0	682,5	382,5	444,5	1440,0
6	378,0	630,0	360,0	472,5	1350,0
7	504,0	735,0	405,0	490,0	1530,0
8	630,0	840,0	450,0	518,0	1620,0

Указание. Так как умножение целого столбца (а иногда и нескольких столбцов) на одно и то же число будет употребляться многократно, то отметим, что для таких перемножений удобно поставить на арифмометре множитель, а затем последовательно умножать его на все числа столбца. То же самое рекомендуется и при пользовании логарифмической линейкой.

Так как производительности 3-го и 8-го станков по всем видам материалов совпадают, то введем вместо них один третий станок с удвоенной производительностью (см. табл. IV).

Таблица IV

№ станков	Номенклатура				
	1	2	3	4	5
1	504,0	735,0	382,5	455,0	1485,0
2	567,0	819,0	436,5	479,5	1575,0
3	1260,0	1680,0	900,0	1036,0	3240,0
4	504,0	735,0	405,0	472,5	1530,0
5	441,0	682,5	382,5	444,5	1440,0
6	378,0	630,0	360,0	472,5	1350,0
7	504,0	735,0	405,0	490,0	1530,0
Σ	4158,0	6016,5	3271,5	3850,0	12150,0
$\frac{20\,000}{\Sigma}$	4,810	3,324	6,113	5,195	1,646

В табл. IV производительности $a_{i,k}$ выражены в некоторых условных единицах (усл. ед.); в дальнейшем при решении математической задачи мы будем исходить из этой таблицы, причем производительности будут выражены в тех же усл. ед.

3. О ходе решения

Применяя метод разрешающих множителей (приложение I, пп. 3, 4) для решения задачи, мы должны найти числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$. За первые приближения λ^0 возьмем величины (табл. IV, строка 9), обратно пропорциональные суммам производительностей (табл. IV, строка 8).

Замечание. Беря множители λ с точностью до третьего знака после запятой, мы вынуждены будем в дальнейшем считать два числа равными, если их разность не превосходит одной тысячной их величины.

Так как следует принимать $h_{i,s}=0$, если $\lambda_k a_{i,k} > \lambda_s a_{i,s}$ для некоторого k, то для каждого приближения к λ мы будем выделять среди произведений $\lambda_s a_{i,s}$ те значения (для каждого i), которые больше остальных.

Если величины λ взяты как либо, то, вообще говоря, на каждой строке будет только по одному выделенному (ненулевому) значению h, т. е. всего будет выделено n (в нашем случае 7) значений, уравнения же $\sum_k h_{i,k}=1$ и $z_1=z_2= \ldots =z_m$ накладывают на $h_{i,k}$ $n+m-1$ (т. е. 11) условий. В виду этого λ_k должны быть так подобраны, чтобы на четырех строках было по два максимальных произведения. Тогда мы будем иметь 11 ненулевых $h_{i,k}$, которые и определятся из вышеупомянутых 11-ти уравнений.

Отметим, что подбор λ_k усложняется тем, что на $h_{i,k}$ наложено ограничение $h_{i,k} \geqslant 0$.

4. Вычисление λ_k

За первое приближение $\lambda^0{}_k$, как сказано, берем числа строки 9-ой табл. IV — 1-ая строка табл. А.

Таблица А

№ строки		1	2	3	4	5
1	λ^0	4,810	3,324	6,113	5,195	1,646
2	ε^1	1	1	1,017	1	1
3	ε^2	1	1,083	1,083	1	1
4	ε^3	1	1	1	1	1,082
5	ε^4	1	1	1	1,111	1
6	ε^5	1,003	1	1,003	1,003	1
7	λ	4,824	3,600	6,753	5,789	1,781

Составим произведения $\lambda^0_k \alpha_{i,k}$ (табл. V_1).

Таблица V_1

	1	2	3	4	5
1	2424,2	**2443,1**	2338,2	2363,7	**2444,3**
2	**2727,3**	2722,4	2668,3	2491,0	2592,5
3	**6060,6**	5584,5	5501,7	5382,0	5333,0
4	2424,2	2443,1	2475,8	2454,6	**2518,4**
5	2121,2	2268,6	2338,2	2309,2	**2370,2**
6	1818,2	2094,1	2200,7	**2454,6**	2222,1
7	2424,2	2443,1	2475,8	**2545,6**	2518,4
	1827,0	0 735,0	0	962,5	2970,0 1485,0

На каждой строке выделим (подчеркнем) максимальное число. Согласно сделанного нами ранее замечания, на 1-й строке числа 2443,1 (2-ой столбец) и 2444,3 (5-й столбец) должны считаться равными.

Под k-ым столбцом подпишем сумму производительности тех станков, для которых произведения $\lambda_k \alpha_{i,k}$ подчеркнуто, так например, под 1-ым столбцом подпишем производительность 2-го и 3-го станков по 1-му материалу (табл. IV), т. е. $567{,}0 + 1260{,}0 = 1827{,}0$; под 3-м столбцом будет стоять 0, так как в 3-м столбце не подчеркнуто ни одного числа. При этом на строке 8-ой будем ставить производительности только тех станков, для которых подчеркнуто одно число. В табл. V_1 на строке 1-ой подчеркнуто два числа, поэтому соответствующие производительности проставим не на строке 8-ой, а ниже, на строке 9-ой. Если бы (см. следующие таблицы) еще на какой-либо строке было подчеркнуто по несколько чисел, то производительности, им соответствующие, мы поставили бы еще ниже, т. е. на строке 10-ой и т. д. Удобство такой записи объясняется тем, что нужно, чтобы на четырех строках было выделено по два числа; при этом значения $h_{i,k}$, соответствующие выделенным числам, должны быть положительны и не превосходить единицы, а производительности по всем столбцам должны быть равны. В виду этого важно знать производительности по каждому столбцу, причем, если подчеркнутое число стоит в строке, в которой все остальные числа меньше его, то соответственная производительность целиком входит в производительность по данному материалу (в этом случае $h_{i,k} = 1$); если же есть числа, равные данному, то производительность только частично войдет в производительность строки ($h_{i,k} \leq 1$).

Производительности по табл. V_1 имеют следующий вид: 1-ый столбец 1827,0 усл. ед.; 2-ой — от 0 до 735 усл. ед.; 3-й — 0; 4-ый — 962,5 усл. ед. и 5-ый от 2970 до 4455 усл. ед.; т. е. производительности никак не могут быть равны.

Будем подтягивать отстающие столбцы. Для этого введем к λ поправочные множители ε_k^1. Первым будем подтягивать 3-и столбец.

Обращаясь к табл. V_1, замечаем, что если мы будем увеличивать числа 3-го столбца, то первым подойдет к максимальном число 5-ой строки. Но так как производительность 5-го станк по 3-му материалу равна всего 382,5 усл. ед., что меньше даж производительности по 2-му материалу, то ясно, что нужно увеличить числа 3-го столбца так, чтобы еще в одной строке (4-ой было достигнуто максимальное значение. Для того чтобы найти ε_1^1, поделим число максимальное в 4-ой строке — 2518,4 на 2475,8, остальные ε_k^1 примем равными единице (см. строку 2-ую табл. А).

После умножения на ε_k^1 значений табл. V_1 (именно 3-го столбца) получаем (табл. V_2).

Таблица V_2

	1	2	3	4	5
1	2424,2	**2443,1**	2377,9	2363,7	**2444,3**
2	**2727,3**	2722,4	2713,7	2491,0	2592,5
3	**6060,6**	5584,3	5595,2	5382,0	5333,0
4	2424,2	2443,1	**2517,9**	2454,6	**2518,4**
5	2121,2	2268,6	**2377,9**	2309,2	2370,2
6	1818,2	2094,1	2238,1	**2454,6**	2222,1
7	2424,2	2443,1	2517,9	**2545,6**	2518,4
	1827,0	0 735,0	382,5 405,0	962,5	0 1485,0 1530,0

Теперь минимальные (примерно равные) производительности имеют материалы 2 и 3. Поэтому будем подтягивать их одновременно, т. е. положим для вторых поправочных множителей $\varepsilon_2^2 = \varepsilon_3^2 = \varepsilon$.

При выборе ε замечаем, что первым подходит к максимальному значению число 7-ой строки 3-го столбца, но и на этот раз это не может нас удовлетворить, так же, как и достижение максимального значения числом, стоящим во 2-ой строке 2-го столбца, а потому добиваемся, чтобы число, стоящее в 3-ей строке 3-го столбца, подошло к максимуму.

Находим $\varepsilon = \dfrac{6060{,}6}{5595{,}2} = 1{,}083$. Остальные $\varepsilon_k^2 = 1$ (табл. А, строка 3). Доумножая на эти множители, получаем значения $\lambda_k \alpha_{i,k}$ для третьего приближения (табл. V_3).

Увеличивая числа 5-го столбца (4-ая строка табл. А), получаем те же значения для четвертого приближения (табл. V_4).

Заметим, что хотя в табл. V_4 мы имеем 11 ненулевых значений $h_{i,k}$, тем не менее, оставаясь для $h_{i,k}$ в пределах от 0 до 1, нельзя добиться равенства производительностей всех столбцов.

(Отметим кроме того, что совпадение максимальных значений в строках 4-ой и 7-ой между 3-м и 5-ым столбцами случайное.)

Таблица V_3

	1	2	3	4	5
1	2424,2	**2645,9**	2575,3	2363,7	2444,3
2	2727,3	**2948,4**	2938,9	2491,0	2592,5
3	**6060,6**	6047,8	**6059,6**	5382,0	5333,0
4	2424,2	2645,9	**2726,9**	2454,6	2518,4
5	2121,2	2456,9	**2575,3**	2309,2	2370,2
6	1818,2	2267,9	2423,9	**2454,6**	2222,1
7	2424,2	2645,9	**2726,9**	2545,6	2518,4
	0 1260,0	1554,0	992,5 900,0	472,5	0

Таблица V_4

	1	2	3	4	5
1	2424,2	**2645,9**	2575,3	2363,7	**2644,8**
2	2727,3	**2948,4**	2938,9	2491,0	2805,1
3	**6060,6**	6047,8	**6059,6**	5382,0	5770,3
4	2424,2	2645,9	**2726,9**	2454,6	**2724,9**
5	2121,2	2456,9	**2575,3**	2309,2	2564,6
6	1818,2	2267,9	2423,9	**2454,6**	2404,3
7	2424,2	2645,9	**2726,9**	2545,6	2724,9
	0 1260,0	819,0 735,0	382,5 900,0 810,0	472,5	0 1485,0 3060,0

Подтягивая 4-ый столбец, добиваемся, чтобы не только в 7-ой строке, но и в 4-ой числа этого столбца достигли максимальных значений (табл. V_5).

Все, что было отмечено после табл. V_4, остается в силе и по отношению к табл. V_5, хотя здесь значительно труднее обнаружить невозможность положительных решений для всех $h_{i,k}$ (для того, чтобы это установить, нужно решить систему уравнений).

Увеличиваем числа 1-го, 3-го и 4-го столбцов одновременно. Благодаря одновременности их увеличения, мы сохраняем по два подчеркнутых значения на двух строках (3-ей и 4-ой); кроме того, на 1-ой строке попрежнему остаются два максимальных значения. Увеличивая же числа трех столбцов, мы добьемся того, что еще в одной строке будут два максимальных значения.

Первым достигает максимальных значений число, стоящее во 2-ой строке 3-го столбца; для этого его нужно умножить на

$\varepsilon_3{}^5 = \dfrac{2938,9}{2948,4} = 1,003$ (см. строку 6-ую табл. A).

Таблица V_5

	1	2	3	4	5
1	2424,2	**2645,9**	2575,3	2626,1	**2644,8**
2	2727,3	**2948,4**	2938,9	2767,5	2805,1
3	**6060,6**	6047,8	**6059,6**	5979,4	5770,3
4	2424,2	2645,9	**2726,9**	**2727,1**	**2724,9**
5	2121,2	2456,9	**2575,3**	2565,5	2564,6
6	1818,2	2267,9	2423,9	**2727,1**	2404,3
7	2424,2	2645,9	2726,9	**2828,2**	2724,9
	0 1260,0	819,0 735,0	382,5 900,0 405,0	962,5 472,5	0 1485,0 1530,0

Таблица V_6

	1	2	3	4	5
1	2431,5	**2645,9**	2583,0	2634,0	**2644,8**
2	2735,5	**2948,4**	**2947,7**	2775,8	2805,1
3	**6078,8**	6047,8	**6077,8**	5997,3	5770,3
4	2431,5	2645,9	**2735,1**	**2735,3**	2724,9
5	2127,6	2456,9	**2583,0**	2573,2	2564,6
6	1823,7	2267,9	2431,2	**2735,2**	2404,3
7	2431,5	2645,9	2735,1	**2836,7**	2724,9
	0 1260,0	0 735,0 819,0	382,5 900,0 436,5 405,0	962,5 472,5	0 1485,0

По табл. V_6 производительность 1-го столбца колеблется от 0 до 1260,0 усл. ед., 2-го от 0 до 1554 усл. ед., 3-го от 382,5 до 2124,0 усл. ед., 4-го от 962,5 до 1445,0 усл. ед. и 5-го от 0 до 1485,0 усл. ед. Значения производительностей для всех столбцов одного порядка и число ненулевых значений $h_{i,k}$ равно 11.

5. Вычисление $h_{i,k}$

Положив $h_{i,k} = 0$, если число, стоящее в i-ой строке k-го столбца табл. V_6, не подчеркнуто, получим для остальных $h_{i,k}$ уравнения

$$1260h_{3,1} = 819h_{2,2} + 735h_{1,2} = 436,5h_{2,3} + 900h_{3,3} + 405h_{4,3} + 382,5h_{5,3} = 472,5h_{4,4} + 472,5h_{6,5} + 490h_{7,4} = 1485h_{1,5};$$

$$h_{1,2} + h_{1,5} = 1; \quad h_{2,2} + h_{2,3} = 1; \quad h_{3,1} + h_{3,3} = 1; \quad h_{4,3} + h_{4,4} = 1;$$

$$h_{5,3} = 1; \quad h_{6,4} = 1; \quad h_{7,4} = 1.$$

Введем неизвестные:

$$x_1 = h_{3,1};\quad x_2 = h_{1,5};\quad x_3 = h_{2,3};\quad x_4 = h_{4,4}.$$

Использовав последние семь уравнений, получим для первых четырех, после приведения подобных, следующий вид:

$$1554 - 819x_3 = 2220x_2;$$
$$1260x_1 = 1485x_2;$$
$$1687{,}5 + 436{,}5x_3 - 900x_1 - 405x_4 = 1485x_2;$$
$$962{,}5 + 472{,}5x_4 = 1485x_2;$$

или после сокращения:

$$740x_2 = -273x_3 + 518$$
$$33x_2 = 28x_1$$
$$33x_2 = -20x_1 + 9{,}7x_3 - 9x_4 + 37{,}5$$
$$297x_2 = +94{,}5x_4 + 192{,}5.$$

Решая последнюю систему уравнений, получаем для x_i значения:

$$x_1 = 0{,}7872$$
$$x_2 = 0{,}6679$$
$$x_3 = 0{,}0871$$
$$x_4 = 0{,}0620$$

Замечание. Мы имеем право вычислять значения x-ов (а следовательно и $h_{i,k}$) с точностью до 4-го знака после запятой, несмотря на то, что λ_k были вычислены только с точностью до 3-го знака, так как λ_k имеют только вспомогательное значение и погрешность при их вычислении не влияет на точность вычисления $h_{i,k}$.

Находя по x_i значения $h_{i,k}$, получим для них следующие значения (табл. В).

Таблица В

	1	2	3	4	5
1	0	0,3321	0	0	0,6679
2	0	0,9129	0,0871	0	0
3 (8)	0,7872	0	0,2128	0	0
4	0	0	0,9380	0,0620	0
5	0	0	1	0	0
6	0	0	0	1	0
7	0	0	0	1	0

Значения в строке 3 означают как время обработки данного материала на станке 3, так и на станке 8 (см. табл. I и III), впрочем их можно, очевидно, варьировать в известных пределах.

Общая производительность по каждому материалу составляет: 991,8 усл. ед.

6. Проверка

Для того чтобы проверить максимальность z, проверим (см. пп. 4 и 6), правильно ли мы выделили ненулевые значения $h_{i,k}$. Для этого составим таблицу значений $\lambda_k \alpha_{i,k}$ (т. е. помножим столбцы табл. IV на строчку 7-ую табл. А) и на каждой строчке выделим максимальные значения (см. табл. VI).

Таблица VI

	1	2	3	4	5
1	2431,3	**2646,0**	2583,0	2634,0	**2644,8**
2	2735,0	**2948,4**	**2947,7**	2775,8	2805,1
3	**6078,2**	6048,0	**6077,7**	5997,4	5770,4
4	2431,4	2646,0	**2735,0**	**2735,3**	2724,9
5	2127,4	2457,0	**2583,0**	2573,2	2564,6
6	1823,5	2268,0	2431,1	**2735,2**	2404,4
7	2431,3	2646,0	2735,0	**2836,6**	2724,9

Для проверки $h_{i,k}$ вычислим производительности по каждому материалу:

1-ый материал $1260 \cdot 0{,}7872 = 991{,}9$ усл. ед.
2-ой " $735{,}0 \cdot 0{,}3321 + 819 \cdot 0{,}9129 = 991{,}8$ усл. ед.
3-й " $436{,}5 \cdot 0{,}0871 + 900 \cdot 0{,}2128 + 405 \cdot 0{,}9380 + 382{,}5 =$
$= 991{,}9$ усл. ед.
4-ый " $472{,}5 \cdot 0{,}0620 + 962{,}5 = 991{,}8$ усл. ед.
5-ый « $1485 \cdot 0{,}6679 = 991{,}8$ усл. ед.

7. Производительности станков

Вычислим производительности по материалам непосредственно для данных ЦЛВФТ (табл. I). Результаты даны в табл. VII.

Таблица VII

	1	2	3	4	5
1	0	2,32	0	0	11,02
2	0	7,12	0,84	0	0
3	3,94	0	2,13	0	0
4	0	0	8,44	0,84	0
5	0	0	8,50	0	0
6	0	0	0	13,50	0
7	0	0	0	14,00	0
8	3,94	0	2,13	0	0
Итого	7,88	9,44	22,04	28,34	11,02

8. Сравнение с простейшим решением

Чтобы вычислить экономический эффект вышеизложенного, сравним полученную производительность с той, которая получилась бы, если бы на каждом станке материалы изготовлялись в данном отношении. Ведя вычисления для приведенных данных (табл. IV), нужно, чтобы на каждом станке всех материалов изготовлялось поровну. Определим, сколько каждого материала изготовляет i-ый станок. Пусть y_i — искомое количество материала в усл. ед.

Тогда

$$y_i = \alpha_{i,1} h_{i,1} = \alpha_{i,2} h_{i,2} = \alpha_{i,3} h_{i,3} = \alpha_{i,4} h_{i,4} = \alpha_{i,5} h_{i,5},$$

а так как

$$h_{i,1} + h_{i,2} + h_{i,3} + h_{i,4} + h_{i,5} = 1,$$

то

$$y_i = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{i,1}} + \frac{1}{\alpha_{i,2}} + \frac{1}{\alpha_{i,3}} + \frac{1}{\alpha_{i,4}} + \frac{1}{\alpha_{i,5}}}.$$

Вычисляя y_i по таблицам Барлоу (обратных величин), получаем:

$$y_1 = 113{,}2; \qquad y_5 = 107{,}6;$$
$$y_2 = 125{,}0; \qquad y_6 = 101{,}3;$$
$$y_3 = 264{,}9; \qquad y_7 = 117{,}5$$
$$y_4 = 116{,}5;$$

и общая производительность 946,0 усл. ед.

Максимальная производительность в отношении к только что вычисленной составляет: 104,8%.

Замечание. Такой, сравнительно небольшой, процент прироста объясняется тем, что производительности станков, по данным ЦЛВФТ, почти пропорциональны.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ДОБАВЛЕНИЕ (ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ РАЗРЕШАЮЩИХ МНОЖИТЕЛЕЙ)

В приложении 1-м было установлено, что определение чисел $h_{i,k}$ по разрешающим множителям приводит к решению задачи, и был указан путь нахождения этих разрешающих множителей. Для практических целей этого, пожалуй, и достаточно; но для полноты изложения представляется важным установить тот факт, что разрешающие множители всегда существуют. Это покажет, что метод разрешающих множителей наверное применим к каждой задаче. В виду того, что незнание этого доказательства существования не может нисколько помешать ни усвоению метода, ни сознательному его применению, а также в виду того, что для этого доказательства нужны несколько более деликатные математические средства, мы сочли целесообразным выделить его в это специальное добавление.

В изложении доказательства существования разрешающих множителей мы для краткости ограничимся рассмотрением задачи А.[1] Считаем полезным привести два доказательства — аналитическое и геометрическое.

1. Аналитическое доказательство

Будем рассматривать системы чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, подчиненные условиям $\lambda_k \geqslant 0$; $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = 1$. Для каждой данной системы $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ рассмотрим произведения $\lambda_1 \alpha_{i,1}$; $\lambda_2 \alpha_{i,2}$ ... ; $\lambda_m \alpha_{i,m}$ и для тех k, для которых произведение $\lambda_k \alpha_{i,k}$ не максимально в своем ряду, положим $h_{i,k} = 0$, прочие $h_{i,k}$ постараемся подобрать так, чтобы $\min(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ был возможно велик. Максимальное значение этого минимума обозначим $C(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$. Очевидно, это функция ограниченная. Например, ясно, что $C(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \leqslant \sum_{i,k} \alpha_{ik}$. Эта функция имеет точную верхнюю границу — обозначим ее C^*. Существует последовательность систем $(\lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)}, \ldots, \lambda_m^{(s)})$, для которых значение $C(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ приближается к C^*

$$\lim_{s \to \infty} C(\lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)}, \ldots, \lambda_m^{(s)}) = C^*.$$

[1] Более полное математическое рассмотрение вопроса будет дано в специальной математической статье автора.

Из последовательности систем $(\lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)}, \ldots, \lambda_m^{(s)})$ $(s = 1, 2, \ldots)$ можно выбрать частичную сходящуюся; не умаляя общности, очевидно, можем считать такой самую первоначальную последовательность, т. е.

$$(\lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)}, \ldots, \lambda_m^{(s)}) \to (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m).$$

Далее, при каждом s существует определенная система чисел $\{h_{i,k}^{(s)}\}$, которая приводит к значению $C(\lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)}, \ldots, \lambda_m^{(s)})$. Эти системы чисел, переходя, если надо, к частичной последовательности, также можем считать сходящимися к определенной системе:

$$\lim_{s \to \infty} h_{i,k}^{(s)} = \bar{h}_{i,k} \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \ k = 1, 2, \ldots, m).$$

Так как при каждом s выполнялись необходимые условия для $h_{i,k}^{(s)}$, то и в пределе для $\bar{h}_{i,k}$ также должны быть выполнены эти условия. Для системы $h_{i,k} = \bar{h}_{i,k}$ получим:

$$\min(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_m) = \lim_{s \to \infty} \min(z_1^{(s)}, z_2^{(s)}, \ldots, z_m^{(s)}) =$$

$$= \lim C(\lambda_1^{(s)}, \ldots, \lambda_m^{(s)}) = C^*,$$

а потому $C(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m) \geqslant C^*$. Так как, с другой стороны, справедливо обратное неравенство, то имеем:

$$\min(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_m) = C(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m) = C^*.$$

Теперь изменением λ_k можем добиться того, чтобы все z_k равнялись C^*. Действительно, если некоторое $z_k > C^*$, то уменьшая соответствующее λ_k и увеличивая пропорционально остальные, можем добиться совпадения в $\lambda_k \alpha_{i,k}$, за счет которого это z_k можно уменьшить. Так как прочие z_k все зараз превзойти C^* не могут, ибо это противоречило бы определению C^*, то таким способом постепенно можем притти к таким значениям $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_m^*$, для которых $h_{i,k}$ возможно выбрать так, что $z_1 = z_2 = \ldots = z_m = C^*$. После того как мы этого добились, существование разрешающих множителей и можно считать установленным.

2. Геометрическое доказательство

Рассмотрим все возможные системы $\{h_{i,k}\}$, удовлетворяющие условиям $h_{i,k} \geqslant 0$; $\sum_{k=1}^{m} h_{i,k} = 1$. Каждой системе чисел $h_{i,k}$ отвечает определенная система чисел $z_k = \sum_i \alpha_{i,k} h_{i,k}$. Такие системы $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$, взятые для всевозможных допустимых $\{h_{i,k}\}$, заполнят в m-мерном пространстве точек $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ некоторое выпуклое тело K (см. рис. 2 [1]). Рассмотрим далее

[1] Чертеж выполнен по данным примера 1 (стр. 7 и 33 .

другое выпуклое множество H_C, состоящее из точек, удовлетворяющих условиям $z_1 \geqslant C$; ... ; $z_m \geqslant C$, или, что то же самое, $\min(z_1, z_2, \ldots, z_m) \geqslant C$.

Обозначим, как прежде, через C^* общее максимальное значение z и z' в задачах А и А (см. приложение 1, п. 2). Тогда, так как C^* есть максимальное значение для $\min(z_1, z_2, \ldots, z_m)$, то для всех точек тела K $\min(z_1, z_2, \ldots, z_m) \leqslant C^*$. Поэтому тело K не имеет общих внутренних точек с множеством H_{C^*}, так как для всех внутренних точек последнего $\min(z_1, z_2, \ldots, z_m) \geqslant C^*$. Итак, K и H_{C^*} имеют только общие граничные точки, одной из них будет $(C^*, C^*, \ldots, C^*)$. По теореме Минковского, существует проходящая через эту точку плоскость, разделяющая эти выпуклые множества; ее уравнение имеет вид:

$$\lambda_1^* z_1 + \lambda_2^* z_2 + \ldots + \lambda_m^* z_m = C^*,$$

где $\lambda_1^* + \lambda_2^* + \ldots + \lambda_m^* = 1$ (этого всегда можно добиться), а свободный член равен тогда C^*, так как точка $(C^*, C^*, \ldots C^*)$ лежит в этой плоскости. Кроме того, из геометрического вида области H_{C^*} ясно, что непременно $\lambda_k^* \geqslant 0$.

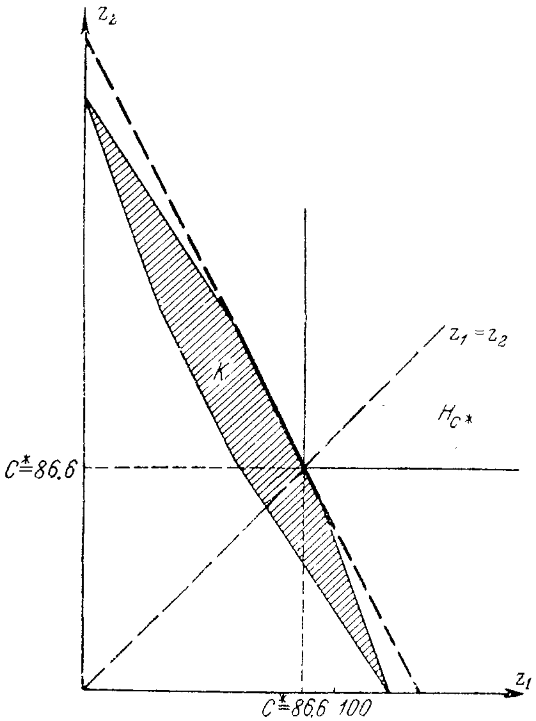

Рис. 2.

Коэфициенты для этой разделяющей плоскости (на рис. 2 изображены жирно и жирным пунктиром) и являются разрешающими множителями. Действительно, пусть $\{h_{i,k}^*\}$ — система чисел, дающая $z_1 = z_2 = \ldots = z_m = C^*$. Через t_i, как раньше, обозначим наибольшее из произведений.

$$\lambda_1^* \alpha_{i,1}; \ \lambda_2^* \alpha_{i,2}; \ \ldots; \ \lambda_m^* \alpha_{i,m}.$$

Так как тело K лежит по одну сторону от разделяющей плоскости, то для всех его точек $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ будет:

$$\sum \lambda_k^* z_k \leqslant C^*,$$

или, что то же самое, для любых допустимых $\{h_{i,k}\}$

$$\sum_k \lambda_k^* \sum_i \alpha_{i,k} h_{i,k} = \sum_i \sum_k \lambda_k^* \alpha_{i,k} h_{i,k} \leqslant C^*.$$

В частности, беря $h_{i,k}=1$, для тех k, для которых $\lambda_k^* \alpha_{i,k} = t_i$, находим $\sum_i t_i \leqslant C^*$. С другой стороны,

$$C^* = \sum_k \lambda_k^* z_k^* = \sum_k \lambda_k^* \sum_i \alpha_{i,k} h_{i,k}^* =$$

$$= \sum_i \sum_k (\lambda_k^* \alpha_{i,k}) h_{i,k}^* \leqslant \sum_i t_i \sum_k h_{i,k}^* = \sum_i t_i$$

при этом знак $=$ в неравенстве достигается только в том случае, если $h_{i,k}^* = 0$ всякий раз, когда $\lambda_k^* \alpha_{i,k} < t_i$, но благодаря ранее найденному неравенству $\sum_i t_i \leqslant C^*$, знак равенства здесь непременно должен осуществляться, а потому указанное обстоятельство для $h_{i,k}^*$ действительно имеет место. Итак оказывается, что для $h_{i,k} = h_{i,k}^*$ выполнено условие равенства нулю всех тех из них, которые не отвечают максимальным произведениям; а прочие таковы, что $z_1 = z_2 = \ldots = z_m$. Это показывает, что λ_k^* — действительно разрешающие множители, и существование разрешающих множителей в задаче А для любого случая доказано.